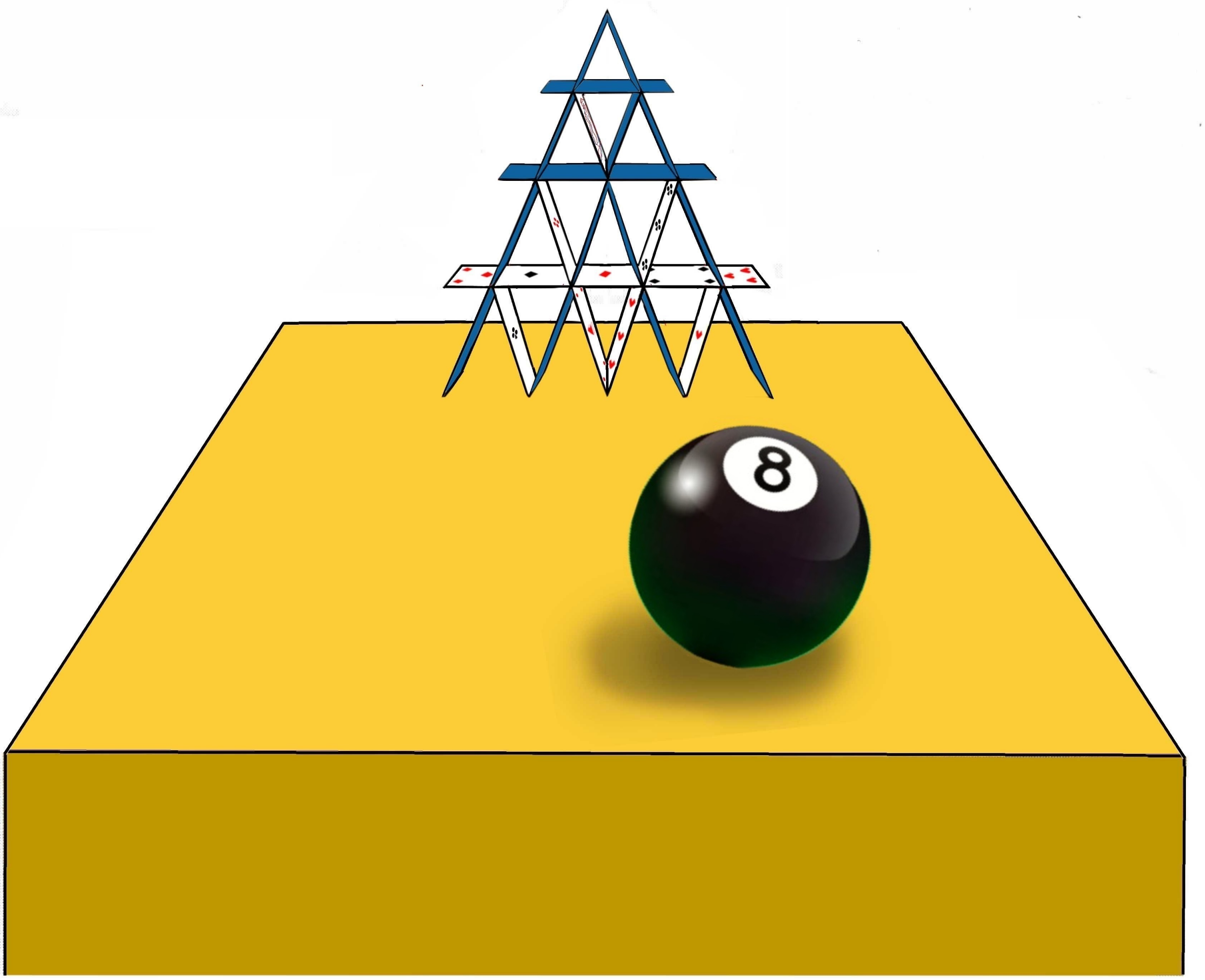
Hicham Zejli

Modèle Cosmologique Janus

Univers bimétrique:
Perspectives & Défis

Préface de Jean-Pierre Petit

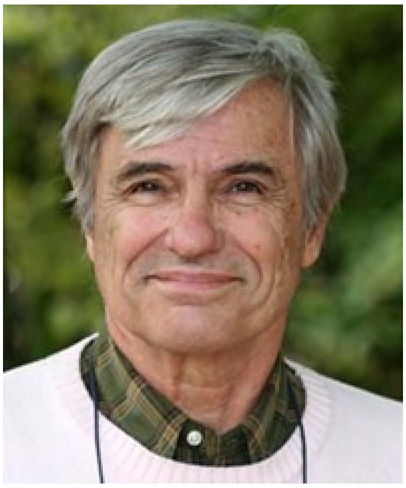


ISBN 978-29-59189-30-2

Version numérique actualisée :

Table des matières

Préface de Jean-Pierre Petit



Nous sommes en 2024. Faites le calcul. Je suis né en 1937. Au moment où j'écris ces lignes je vais avoir 87 ans. Le temps passe si vite qu'au moment où vous lisez ces lignes, je ne serai peut-être plus de ce monde. J'écris ces pages, et je pense qu'Hicham a le même sentiment, comme on jette une bouteille à la mer, contenant un message d'appel.

J'ai envie de dire : Que se passe-t-il dans le monde scientifique ?

Il y a plus d'un siècle, comme vous le savez, le monde scientifique a subi le bouleversement résultant de l'émergence soudaine de deux nouvelles disciplines : la mécanique quantique et la cosmologie. Ainsi, pendant soixante-dix ans, les progrès scientifiques se sont enchaînés à un rythme fantastique. Soit des théoriciens apportaient l'explication d'un fait connu de longue date, comme l'avance du périhélie de Mercure, phénomène que la mécanique newtonienne s'avérait incapable d'expliquer. Soit il s'agissait d'observations nouvelles, comme la découverte de l'expansion de l'univers, dont le Russe Alexandre Friedman ne tarda pas à rendre compte en produisant la première solution instationnaire de l'équation introduite par Einstein en 1915, qui constitue désormais le fondement de cette nouvelle vision du monde, la relativité générale.

Parfois une vision nouvelle émane de théoriciens, proposant d'étranges objets, auxquels ils font recours pour rendre des calculs plus équilibrés. A titre d'exemple :

l'antimatière, dont l'existence est conjecturée par l'anglais Paul Dirac, en 1928.

A titre anecdotique, citons la réaction du danois Niels Bohr, après lecture de cet article :

"Cette théorie me parait idéale pour capturer les éléphants, en Afrique. On accroche l'article de Dirac à un arbre. Un éléphant arrive et lit l'article de Dirac. Il est si stupéfié qu'on peut alors le capturer facilement."

Mais la Nature se montre chic fille avec Dirac et apporte très vite, en 1931, la confirmation de l'existence des antiélectrons dans le rayonnement cosmique. A l'époque, on n'est pas en mesure de recréer cette antimatière dans des collisionneurs de particules. Ce sont donc des photons gamma, issus des tréfonds du cosmos, qui se muent en un couple électron-anti-électron, objet auquel on donne le nom de positron.

Cette révolution, qualifiée de changement de paradigme, commence en 1895, avec des découvertes faites par Conrad Röntgen, Henri Becquerel et J.J.Thomson, annonçant l'entrée fracassante des particules et des phénomènes atomiques sur la scène scientifique. Pendant des décennies, les théoriciens d'un côté, les expérimentateurs et observateurs de l'autre, ressemblent à deux groupes de pur-sang galopant côte à côte, les uns se trouvant parfois en avance d'une courte encolure, sur d'autres.

Tout cela se poursuit pendant un très petit nombre de décennies suivant la seconde guerre mondiale. Parmi ces découvertes majeures, on peut citer celle, en 1967, fortuite, du fond de rayonnement cosmologique, de cette population de photons de basse énergie, apportant la preuve qu'une fantastique annihilation de couples *"Matière-Antimatière"* s'était produite, au début de l'univers.

A la fin des années soixante, la préoccupation de ceux qu'on appelle désormais les cosmologistes se résume à déterminer la valeur de la densité moyenne dans l'univers. Si celle-ci est supérieure à 10^{-29} grammes par centimètre cube, alors l'univers évolue de manière cyclique. Après une phase d'expansion, il s'effondre sur lui-même, en produisant un Big Crunch. Si cette densité est inférieure, dans le lointain futur de l'univers les galaxies s'éloigneront alors les unes des autres, indéfiniment, à des vitesses devenues constantes. Et si cette densité était égale cette valeur, disons alors que l'évolution se situe entre ces deux extrêmes.

Je m'en souviens parfaitement : C'est à cette époque que j'ai débuté ma carrière de chercheur, à la fin des années soixante.

Après, que se passe-t-il ? Très vite, la mécanique se dérègle et tout va de mal en pis.

Les théoriciens de cette physique des particules, née avec le siècle, grâce à l'accroissement des énergies mises en jeu dans les accélérateurs, prédisent l'apparition d'objets nouveaux, qu'ils nomment superparticules.

Mais rien ne se produit.

A l'aube des années quatre-vingt, pour rendre compte de la vitesse de rotation des étoiles, dans les galaxies, pour expliquer pourquoi la force centrifuge ne les fait pas éclater, on propose l'existence d'une matière sombre, représentant à elle seule les quatre cinquièmes de la masse totale de l'univers.

En 1989, des observations menées par le satellite COBE font apparaître l'extrême homogénéité de l'univers primitif. Pour justifier cela, un jeune Russe, Andreï Linde, propose sa théorie de l'inflation, selon laquelle l'univers, quand il n'était âgé que des 10^{-33} seconde, connait une expansion brutale d'un facteur 10^{26}, provoquée par un nouveau champ, constitué de nouvelles particules, auxquelles on donne le nom d'inflatons.

Aujourd'hui, il y a autant de modèles d'inflatons que de chercheurs qui se sont spécialisés dans ce domaine.

En 2011, un prix Nobel consacre une autre découverte : celle de l'accélération de l'expansion cosmique, imputée à une énergie noire. En traduisant son importance à l'aide de l'expression d'Einstein $E = mc^2$, cette fois-ci 75% du contenu cosmique échappe à l'observation.

En 2024, au moment où j'écris ces lignes, il n'existe aucun modèle crédible d'énergie noire.

En faisant le compte, la matière ordinaire, se prêtant aux observations, ne représente plus que 4% de la soupe cosmique.

On propose différents candidats pour la matière sombre, le principal étant ce représentant de l'hypothétique famille des superparticules, le neutralino. Mais, outre le fait qu'il s'avère impossible de le faire apparaitre dans les puissants collisionneurs, celui-ci échappe à toute tentative de détection dans des expériences coûteuses menées dans des tunnels et dans des mines, pour se protéger du rayonnement cosmique par une large épaisseur de roche.

Et sur le front de la théorie ?

A la charnière des années soixante-dix, quand l'absence de résultats, dans les expériences de physique des hautes énergies, incite à opérer un nouveau changement de paradigme, un groupe de chercheurs propose de représenter à la fois les particules matérielles et celle associées au rayonnement par un nouveau modèle, constitué de cordes vibrantes, ouvertes ou fermées. La majorité des théoriciens s'engouffre dans ce qu'ils considèrent comme une voie nouvelle et prometteuse. Des postes de chercheurs et d'enseignants sont créés dans tous les pays. Des équipes se constituent. Les acteurs au centre de ce mouvement vont même jusqu'à envisager le rêve de construire la théorie du tout.

Ce courant de pensée donne naissance à des montagnes d'articles et de thèses de doctorat.

Qu'en est-il, à l'aube de ce troisième millénaire ?

Rien : La montagne accouche d'une souris.

La situation actuelle rappelle la nouvelle de Hans Christian Andersen : *«Les habits neufs de l'empereur. Lorsque, à la fin de l'histoire, un enfant s'écrit : il est nu !»*

Le livre que propose ici Hicham est l'histoire d'un projet de changement de paradigme, qu'on peut résumer en une phrase : *L'univers est fait de masses positives et de masses négatives*

Pourquoi pas, après tout ?

Mais cette idée est comme un fil, qui dépasse. On tire sur ce fil : une ficelle suit. On tire sur la ficelle, c'est une corde qui s'y trouve attachée. On tire sur la corde et suit un câble de forte section, dont la traction ébranle l'édifice.

Quel édifice ? La sacro-sainte relativité générale d'Albert Einstein dont l'équation se trouve gravée dans la pierre des instituts de physique du monde entier.

Est-ce à dire que cette théorie est fausse ? Non. Elle n'est que l'une des faces de la pièce. On doit l'intégrer dans un système de deux équations de champ couplées. Dans les pages de ce livre, vous trouverez tout ce qui a émergé de cette idée sacrilège.

En Janvier 2023, restant le seul à porter ce lourd projet depuis quarante années, je donne une conférence à Paris, à laquelle assiste Hicham.

Les idées nouvelles sont comme ces pièges qu'on utilise en Afrique pour capturer les petits singes. On place une coque creuse à leur portée, percée d'un trou. A l'intérieur de la coque on dispose un fruit, qu'ils aiment beaucoup, mais dont le diamètre est exactement celui du trou. Lorsque le singe glisse sa main dans l'orifice, il lui est impossible de ressortir à la fois la main et le fruit. J'ai été moi-même victime d'un piège similaire, il y a quarante ans. Une idée passait par là qui s'est emparée de moi et a pris possession de mes neurones. Quand une idée est logique, fonctionnelle, féconde, il est très difficile de s'en débarrasser. Et, finalement, si cette idée s'accorde avec les observations, la rejeter devient simplement impossible, ce qui complique beaucoup votre vie en faisant de vous une sorte de mutant, d'étranger au sein de votre communauté scientifique.

A moins que vous décidiez de rester dans le labyrinthe.

En 1959 un anglais, Arthur Koestler, a écrit un litre intitulé : *Les somnambules*. Il décrit les scientifiques comme ces gens qui marchent, dans leur sommeil, les yeux fermés, les deux mains tendues en avant, pour trouver leur route. Ils marchent, sans le savoir, dans un labyrinthe. Ne comprenant pas son mode de construction, il leur arrive de passer à côté d'une porte grande ouverte, sans être capable de la voir, alors qu'ils s'engagent dans une voie qui s'avèrera être une impasse.

Cette idée n'est pas nouvelle. On trouve une idée similaire, plus statique, chez Platon, avec son mythe de la caverne.

J'en tiens maintenant à évoquer ce qui est arrivé à Hicham Zejli. En janvier 2023, alors qu'il travaille comme ingénieur informaticien dans une société française, il est intrigué par le contenu de la conférence que je donne à Paris, sur mon modèle cosmologique Janus. Il visionne alors la trentaine de vidéos que j'ai créées en 2017, lit tous les livres en rapport avec le thème, pour présenter les grands traits de ce modèle. Il refait tous les calculs qu'il trouve dans les fichiers pdf que j'ai placés sur Internet, et qui accompagnent mes vidéos. Et là, le piège se referme.

Hicham Zejli lors de sa présentation au colloque du CITV à Bastia en avril 2024

Si vous lisez son livre, attention ! Vous risquez d'en être victime à votre tour. Ces pages peuvent vous amener à monter sur un des murs du labyrinthe, en ouvrant les yeux. Alors, le monde scientifique vous apparaîtra différemment. Comme cela a été le cas d'Hicham, vous percevrez soudain des gens, récompensés parfois par les prix les plus prestigieux, errant comme des somnambules, tournant en rond dans une boucle du labyrinthe.

Des modèles, ayant reçu l'adhésion de ceux qui constituent ce qu'on appelle la communauté scientifique, vous apparaîtront alors comme la conséquence évidente d'erreurs de calcul flagrantes. Vous verrez comment ces somnambules passent et repassent à côté de de nouvelles voies, largement ouvertes, magnifiquement en accord avec une masse d'observations, incapables de les voir, en s'accrochant à des idées qui ne sont plus que planches, pourries, fébrilement clouées sur les brèches que les récifs de la dure réalité a provoqué dans un Modèle Standard qui fait eau de toutes parts.

Et vous aurez envie de crier, comme le personnage d'Andersen, *« le roi est nu ! »*

Le travail accompli par Hicham en moins d'une année est considérable, et cela alors qu'il a fait tout cela en dehors de ses activités professionnelles, dans ce qu'on pourrait qualifier d'heures de loisir. En douze mois, il a compris, assimilé en profondeur, et non superficiellement, une masse étonnante de choses touchant aux différents domaines affectés par mon modèle Janus. Je n'ai jamais vu quelqu'un avaler et digérer autant de choses, aussi complexes, en aussi peu de temps.

Devenant le premier chroniqueur de cette fantastique aventure qu'est ce modèle Janus et de tout ce qui en découle, il en témoigne dans ce livre, qui se devait d'être écrit. Il participe déjà activement, depuis des mois, à la rédaction d'articles et ne veut rien manquer de cette aventure. Plus qu'un témoin, il veut en être un des acteurs et nous souhaitons qu'il le devienne, en apportant ses idées et ses contributions personnelles à l'édifice.

Le livre qu'il a écrit, se présente, pour bénéficier de la plus large diffusion possible, sous la forme de pdf gratuitement téléchargeables, dans toutes les langues, et devra continuer d'être développé dans cet esprit. La connaissance a ceci de particulier que, lorsqu'on la donne, on ne peut la reprendre et que, dans une certaine mesure, il est difficile de se l'approprier totalement.

Ce livre sert également de journal de bord, dont le contenu continue de s'enrichir progressivement. Je m'engage à indiquer la date de la dernière mise à jour devant le lien de téléchargement. C'est à ce stade que le projet devient particulièrement intéressant. En accédant à la version la plus récente, les lecteurs pourront se tenir informés des progrès continus de nos recherches. Ces recherches évoluent constamment. Par exemple, au moment de rédiger cette nouvelle version de la préface, le 19 mai 2024, un nouveau résultat significatif a été obtenu, qui sera détaillé par Hicham dans les pages de ce livre-journal.

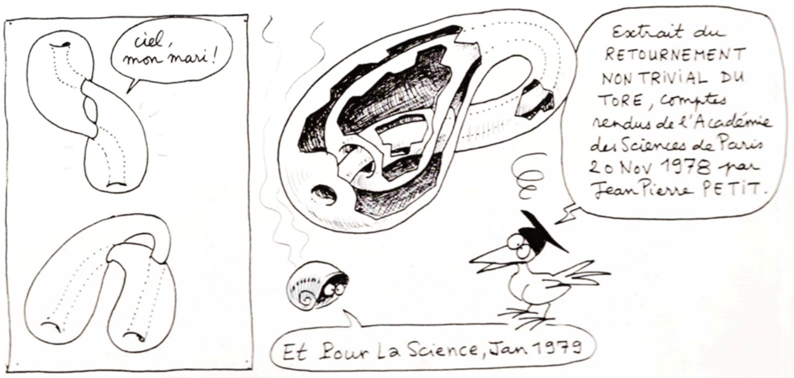
1967 : Sakharov, pour expliquer l'absence d'antimatière primordiale, avait imaginé de la loger dans un univers jumeau, symétrique CPT du nôtre, qui n'aurait en commun avec celui-ci que la singularité du Big Bang (ou, à la place de celle-ci, un tube éliminant cet aspect singulier).

— T-symétrie : la coordonnée de temps est antiparallèle à celle de notre univers.
— P-symétrie : ce second univers est énantiomorphe, c'est-à-dire une image en miroir du nôtre.
— C-symétrie : ce qui est matière chez nous devient antimatière dans ce second univers.

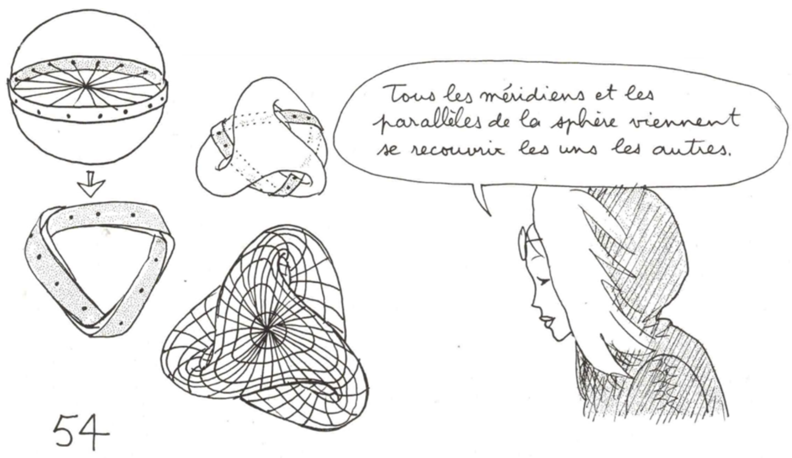
1970 : Le mathématicien Jean-Marie Souriau éclaire cette question d'inversion de la coordonnée de temps, synonyme d'inversion de l'énergie, donc de la masse.

1975 : Je rencontre le mathématicien aveugle Bernard Morin (1931-2018), qui m'initie au retournement de la sphère.

1979 : En janvier, je publie la première description de son retournement dans la revue *Pour la Science.* En même temps, j'invente un retournement du tore passant par le revêtement à deux feuillets de la bouteille de Klein :



Les choses deviennent alors plus claires. Le premier retournement du tore, dû au mathématicien américain Anthony Phillips et publié en 1966 dans *Scientific American* (totalement illisible), passe par le revêtement à deux feuillets de la surface de Boy, comme je l'explique dans ma bande dessinée *Topologicon* en 1985 :



Si on considère une sphère S^4 recouvrant un projectif P^4 (analogue de la surface de Boy en quatre dimensions), alors l'opération engendre la symétrie PT. En ajoutant un nombre pair de dimensions fermées, on crée les nombres quantiques, le premier étant la charge électrique. Si cette hypersphère S^{4+p} est configurée en revêtement à deux feuillets d'un projectif P^{4+p}, cette opération engendre la symétrie CPT. Au passage, on montre que si on envisage d'augmenter le nombre de dimensions, cela ne peut se faire qu'en ajoutant un nombre pair. Pourquoi ? Vous le découvrirez dans un nouveau chapitre.

La conclusion qui émane de cet exposé est que le Modèle Cosmologique Janus trouve sa genèse entièrement dans des considérations topologiques. Cette perspective est une contribution récente à la discipline.

Qui introduit et développe ces nouvelles idées, comme nées dans le brasier d'une forge ? Un retraité de 87 ans et un ingénieur de 44 ans, pendant son temps libre ! Tels des naufragés juchés sur un radeau de fortune, glissant des messages dans des bouteilles, en différentes langues, les confiant aux courants marins.

Ces nouvelles idées sont extrêmement nécessaires aujourd'hui. Il faut être aveugle et sourd pour ne pas voir une crise majeure, sans précédent, qui s'étend. Le modèle standard est comme une vieille chambre à air, constellée de rustines : matière sombre, énergie noire, inflation, cordes.

En 2024, voilà ce qui vient encore d'émerger :

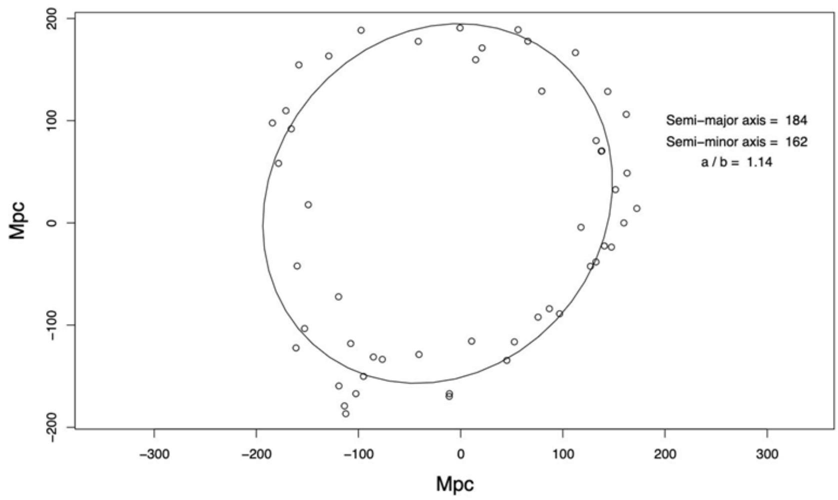


Figure 23: The visually-identified BR absorber members projected onto the plane perpendicular to w_0 with an added fitted ellipse.

La découverte fut réalisée par une étudiante de l'Université du Lancashire, en Angleterre, qui finance ses études en dispensant des cours de violon. Pour visualiser cette découverte, référez-vous à la vidéo suivante :

`https://www.youtube.com/watch?v=S36MqEzUzIw`

À la marque de 1 minute et 32 secondes, vous pourrez écouter les premières mesures d'une œuvre pour violon seul de Bach, qui compte parmi mes compositions favorites.

Et elle manie sacrément bien l'archet, cette jeune femme !

Elle a initialement identifié *The Big Arc* en 2021, suivi par *The Big Ring*, qui correspond à un ensemble de galaxies ou d'amas de galaxies situées à une distance de 9,2 milliards d'années-lumière et possédant un diamètre de 1,3 milliard d'années-lumière. Ces découvertes apportent un soutien substantiel au modèle Janus. Selon moi, ces deux structures résultent d'ondes de densité générées par la formation abrupte de la structure à très grande échelle et lacunaire de l'univers. Alternativement, elles pourraient être le résultat de fluctuations simultanées des métriques, ou d'une combinaison des deux phénomènes. Hicham développera ces points en détail.

En avril, un colloque intitulé « *Challenging the Standard Model* » a eu lieu à la Royal Astronomical Society de Londres. Malheureusement, notre absence à cet événement significatif a été regrettable.

Nous vivons dans une période exceptionnelle caractérisée par des bouleversements majeurs dans le domaine scientifique. Particulièrement en cosmologie, un changement de paradigme est à prévoir.

Je ne serai peut-être plus de ce monde, quand vous lirez ces lignes. Le temps passe si vite. Qu'adviendra-t-il de tout cela ? Je l'ignore.

Je pense, confusément, que l'humanité d'aujourd'hui a rendez-vous avec son destin, qu'au-delà de ce modèle cosmologique se profile une vision différente de l'univers, encore plus vaste. Pour illustrer cela, je reprendrai la fin du discours de réception de son prix Nobel de la paix, prononcé en 1975 par Andréi Sakharov. Des paroles que je fais mienne :

"Il y a des milliers d'années, les tribus humaines souffraient de grandes privations dans leur lutte pour l'existence. Il était alors important, non seulement de savoir manier une matraque, mais de posséder la capacité de penser intelligemment, de tenir compte du savoir et de l'expérience engrangés par la tribu et de développer les liens qui établiraient les bases d'une coopération avec d'autres tribus. Aujourd'hui, la race humaine doit affronter une épreuve analogue. Plusieurs civilisations pourraient exister dans l'espace infini, parmi lesquelles des sociétés qui pourraient être plus sages et plus « performantes » que la nôtre. Je soutiens l'hypothèse cosmologique selon laquelle le développement de l'univers se répète un nombre infini de fois, suivant des caractéristiques essentielles. D'autres civilisations, y compris certaines plus « performantes » sont inscrites un nombre infini de fois sur les pages « suivantes » ou « précédentes » du Livre de l'Univers. Néanmoins, nous ne devrions pas minimiser nos efforts sacrés en ce monde, où comme de faibles lueurs dans l'obscurité, nous avons surgi pour un instant du néant de l'inconscience obscure à l'existence matérielle. Nous devons respecter les exigences de la raison et créer une vie qui soit digne de nous-mêmes et des buts que nous percevons à peine."

Jean-Pierre Petit, citoyen du monde - jean-pierre.petit@manaty.net

Hicham ZEJLI - Né le 22 Septembre 1979 - Nationalité Française
Ingénieur diplômé de l'ENSISA - hicham.zejli@manaty.net

Chapitre 1

Introduction

1.1 Présentation du Contexte & des Objectifs du Livre

Dans le paysage actuel de la cosmologie et de la physique théorique, explorer de nouveaux modèles pour expliquer les phénomènes observés dans notre univers demeure un domaine de recherche vivant et controversé. Ce livre propose d'explorer et de présenter un modèle cosmologique innovant et révolutionnaire, le Modèle Cosmologique Janus (JCM).

En tant qu'ingénieur avec une formation avancée en mathématiques et en physique, j'ai identifié dans l'étude du Modèle Cosmologique Janus une approche novatrice et intellectuellement enrichissante pour explorer et interpréter certains des phénomènes les plus énigmatiques de l'univers. Cette approche ouvre également la voie au développement de multiples applications pratiques à des échelles locales, s'appuyant sur les principes fondamentaux issus de ce modèle.

Ce livre vise à atteindre deux objectifs principaux :

Premièrement, fournir une explication détaillée du Modèle Cosmologique Janus, de ses fondements et de ses implications à travers certaines études, accessible aux scientifiques avec un parcours similaire au mien, c'est-à-dire un niveau avancé en mathématiques et en physique théorique.

Deuxièmement, malgré une collaboration intense, enrichissante et diversifiée au sein de notre équipe, je tiens à souligner le contraste marqué causé par le manque de communication avec les évaluateurs consultés par les grands journaux scientifiques à comité de lecture. Cette situation met en lumière les défis auxquels peuvent faire face les idées innovantes pour émerger et se développer sans un dialogue significatif et constructif parmi les chercheurs.

1.2 Brève Introduction au Modèle Cosmologique Janus & son Importance

Le Modèle Cosmologique Janus se démarque dans le paysage de la physique théorique par sa proposition audacieuse : décrire l'univers comme une variété riemannienne à deux métriques. Cette construction est basée sur la théorie de la relativité générale d'Einstein et intègre des éléments de la physique des particules et de la géométrie symplectique. Le modèle prend ses racines dans les travaux d'Andrei Sakharov et de Jean-Marie Souriau, établissant un lien entre l'inversion du temps, l'inversion de l'énergie, et par conséquent, l'inversion de la masse.

L'une des contributions majeures du modèle est sa capacité à aborder le problème de l'asymétrie baryonique de l'univers. Cette question, au cœur des débats actuels en cosmologie, concerne la prédominance observée de la matière sur l'antimatière, défiant les prédictions du modèle du Big Bang. Le Modèle Cosmologique Janus offre une nouvelle perspective sur ce problème en postulant l'existence d'un univers bimétrique issu de la même singularité, dominé par la matière et l'antimatière.

L'originalité du modèle réside également dans son approche bimétrique de l'univers, où deux *« couches »* de l'espace-temps interagissent par effet gravitationnel, offrant des explications alternatives à des phénomènes tels que l'énergie noire, la matière noire, et potentiellement ouvrant de nouvelles compréhensions du voyage interstellaire.

En résumé, ce livre vise à présenter ce modèle comme une approche innovante, remettant en question les perspectives actuelles en cosmologie et en physique théorique, et invitant à une réflexion approfondie sur les possibilités inexplorées de notre compréhension de l'univers.

Chapitre 2

Fondements Théoriques

2.1 La Loi de Gravitation de Newton

La loi de Newton, formulée dans l'espace euclidien, stipule que lorsqu'une masse m est soumise à l'influence de la force gravitationnelle G générée par une autre masse M, cette force F est inversement proportionnelle au carré de la distance d qui sépare les deux masses. Elle peut être exprimée par l'équation suivante :

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{d^2} \tag{2.1.1}$$

Plus les masses sont grandes, plus la force est importante, mais cette force diminue rapidement à mesure que la distance augmente en raison du terme d^2 dans le dénominateur. Cette loi est essentielle pour comprendre la gravité et les mouvements des objets célestes.

En physique, cette loi de gravitation a été fondamentale dans la compréhension des interactions gravitationnelles entre les corps célestes, de la Terre aux planètes et aux étoiles. Elle demeure une loi fondatrice de la mécanique classique et a joué un rôle crucial dans le développement de l'astronomie et de l'astrophysique. Elle a aussi été confirmée par de nombreuses observations et expériences au fil des siècles, renforçant ainsi sa validité dans la compréhension de l'univers.

Cependant, bien que la loi de gravitation de Newton se soit révélée extrêmement puissante et précise dans de nombreux scénarios, elle a commencé à montrer ses limites lorsqu'appliquée à des situations impliquant des vitesses approchantes celle de la lumière ou des phénomènes à l'échelle astronomique. Ce fut le point de départ de l'émergence de la Théorie de la Relativité Restreinte d'Albert Einstein, marquant un changement de paradigme dans notre compréhension des concepts fondamentaux de l'espace, du temps et de la gravitation. Dans la section suivante, nous plongerons minutieusement dans les principes fondamentaux de la Relativité Restreinte, qui poseront les bases de notre exploration ultérieure de la Relativité Générale. Ceci nous conduira vers une compréhension plus profonde des complexités du cosmos.

2.2 Introduction à la Relativité Restreinte

Au début du $20^{\text{ème}}$ siècle, la physique a connu une révolution conceptuelle, remettant en question les fondements établis par Sir Isaac Newton au $17^{\text{ème}}$ siècle. Avec des observations et expériences de plus en plus précises, des anomalies sont apparues lors de l'étude de vitesses proches de celle de la lumière et dans des environnements cosmiques extrêmes. Dans ce contexte, la Relativité Restreinte d'Albert Einstein a fait son entrée, bouleversant notre compréhension traditionnelle de l'espace, du temps et de la gravité.

2.2.1 L'Espace-Temps de Minkowski & le Temps Propre

La Relativité Restreinte nous invite à abandonner l'idée que l'univers se déroule dans un espace euclidien tridimensionnel où le temps est une entité séparée. À la place, elle propose un modèle dans lequel nous résidons dans une hypersurface à quatre dimensions, où les trois dimensions de l'espace sont perpendiculaires à une dimension temporelle. Cette fusion de l'espace et du temps forme ce qu'on appelle l'espace-temps de Minkowski, avec une signature métrique $(- + ++)$ [1].

Pour mieux saisir ce concept, imaginez un point M se déplaçant dans cet espace-temps décrit par deux coordonnées : le temps (t) et la position spatiale (x). Au fur et à mesure que ce point évolue, un point voisin M' correspond à des valeurs légèrement modifiées : $(t + \mathrm{d}t,\ x + \mathrm{d}x)$, où $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$ représentent de petits incréments de temps et d'espace. Si nous considérons que cet incrément se produit le long d'une trajectoire décrite par $x = ct$ (où c est la vitesse de la lumière), alors $\mathrm{d}x = c\mathrm{d}t$.

À ce stade, nous introduisons le concept de *temps propre*. La quantité s, connue sous le nom de temps propre, est une mesure du temps qui régit la vie d'un objet se déplaçant à une vitesse v. Pour calculer s, nous utilisons l'équation suivante :

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 \tag{2.2.1}$$

Cette équation montre comment le temps propre (s) est lié aux changements de temps $(\mathrm{d}t)$ et d'espace $(\mathrm{d}x)$ lorsqu'un objet se déplace à une vitesse v (ici égale à c) [2]. Elle révèle également que le temps propre peut varier en fonction de la vitesse et de la trajectoire de l'objet, conduisant à des phénomènes tels que la dilatation du temps.

Dans la théorie de la relativité restreinte d'Einstein, le temps n'est pas absolu mais dépend de la vitesse relative de l'observateur. Le développement mathématique suivant décrit la relation entre le temps propre τ, qui est le temps mesuré par l'hor-

1. La signature métrique est une caractéristique importante de l'espace-temps qui indique comment les intervalles de temps et d'espace sont combinés dans les équations de la relativité restreinte. Dans cette signature $(- + ++)$, le premier terme correspond à l'intervalle de temps, qui est soustrait des trois termes suivants correspondant aux intervalles d'espace. Cela signifie que le temps a un signe négatif dans la métrique, tandis que les trois dimensions spatiales ont des signes positifs. Cette signature spécifique est cruciale pour comprendre comment les distances et les intervalles de temps sont mesurés dans le cadre de la relativité restreinte.

2. Ainsi, $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

loge en mouvement (à bord d'un vaisseau spatial), et la coordonnée de temps t, qui est le temps mesuré par l'horloge restée au sol (au repos par rapport à l'observateur) :

$$\begin{aligned} s = c\tau \Rightarrow \mathrm{d}s = c\mathrm{d}\tau \qquad & \Rightarrow c^2\mathrm{d}\tau^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 \\ \Rightarrow \mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{1}{c^2}\mathrm{d}x^2 \quad & \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\tau^2}{\mathrm{d}t^2} = 1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Nous pouvons ainsi en déduire le temps propre par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &\Rightarrow \quad \tau = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \mathrm{Cste} \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Déterminons la valeur de la constante d'intégration en se fondant sur les principes de la relativité restreinte. Considérons que si la vitesse v est nulle, il n'y a pas de différence relative de vitesse entre deux horloges [3]. Par conséquent, elles devraient mesurer le même temps propre τ que la coordonnée de temps t. Ainsi, en se basant sur l'équation 2.2.3, si $v = 0$, alors nous obtenons $\tau = t + \mathrm{Cste}$. Si les deux horloges sont synchronisées au départ, alors τ et t doivent être égaux au moment initial, ce qui implique que la constante doit être nulle. Or la constante d'intégration ne dépend pas de la vitesse v puisqu'elle reste constante pour toutes les valeurs de v, elle doit donc rester nulle dans tous les cas. Ainsi, la relation entre le temps propre τ et la coordonnée de temps t est simplement donnée par :

$$\tau = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{2.2.4}$$

Cela implique que dans un scénario où t représente le temps mesuré par un observateur stationnaire équipé d'une horloge au sol, et v est la vitesse d'un objet équipé d'une horloge embarquée se déplaçant à cette vitesse par rapport à cette immobilité supposée, le temps propre τ qui s'écoulera dans cet objet sera affecté par la dilatation du temps décrite par $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ connue sous le nom de *"facteur de Lorentz"*.

2.2.2 La Vitesse de la Lumière comme Limite

Il est important de noter que dans cet espace-temps, la vitesse de la lumière est contrainte par les propriétés de l'espace-temps (et de son contenu) dans lequel elle se propage.

En partant de l'hypothèse que la variation du temps propre est toujours supérieure ou égale à 0 [4], il s'ensuit que la vitesse de la lumière dans le vide est la limite de vitesse ultime pour les objets en mouvement ayant une masse au repos strictement positive, puisque $v < c$. Les photons, en revanche, suivent des trajectoires pour lesquelles $v = c$, menant à des propriétés uniques associées à la lumière. La

3. L'une en mouvement et l'autre au repos.
4. $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 \geq 0$

Relativité Restreinte est une théorie confinée à l'étude des cadres de référence inertiels, spécifiquement ceux en mouvement rectiligne uniforme (dans des espaces sans courbure, se déplaçant en ligne droite à une vitesse constante).

2.2.3 Concepts Fondamentaux

La relativité restreinte repose principalement sur trois concepts :

- **Postulat de l'Invariance de la Vitesse de la Lumière :** Ce postulat affirme que la vitesse de la lumière dans le vide est une constante universelle, et elle reste la même pour tous les observateurs, quel que soit leur mouvement relatif. En d'autres termes, la vitesse de la lumière ne peut être ni ajoutée ni soustraite de la vitesse d'un observateur. Cette idée fondamentale a été confirmée par la célèbre expérience de Michelson-Morley ([43]).
- **Principe Cosmologique :** Le principe cosmologique postule que l'univers est homogène et isotrope. Cela signifie que ses propriétés sont uniformes et identiques dans toutes les directions et à toutes les échelles. Ce principe nous permet d'étendre l'application des lois de la relativité restreinte à l'échelle cosmique, en considérant l'univers dans son ensemble.
- **Principe de la Relativité Restreinte :** Le principe de la relativité restreinte affirme que les lois de la physique sont cohérentes dans tous les cadres de référence inertiels. Les cadres inertiels sont ceux qui se déplacent à une vitesse constante les uns par rapport aux autres. Ce principe généralise le concept de relativité de Galilée et remet en question la notion de cadre de référence absolu. Il démontre que les lois de la physique restent cohérentes et invariantes, quelles que soient les vitesses relatives des observateurs.

2.2.4 L'Équivalence Masse - Énergie

L'une des équations les plus emblématiques du domaine de la physique est l'équation d'équivalence masse-énergie d'Albert Einstein. Cette équation signifie une connexion profonde entre la masse (m) et l'énergie (E), révélant qu'elles sont interchangeables dans l'univers.

L'intuition révolutionnaire d'Albert Einstein, qui a conduit à la formulation de cette équivalence, est issue de sa théorie de la relativité restreinte. Dans cette théorie, Einstein a postulé que l'énergie et la masse sont intrinsèquement liées, et l'équation sert de pierre angulaire à cette union.

Le concept central de l'équation est simple : il stipule que l'énergie (E) d'un objet est directement proportionnelle à sa masse (m), avec la vitesse de la lumière dans le vide (c) comme constante de proportionnalité. Mathématiquement, cela peut être exprimé comme suit :

$$E = mc^2 \tag{2.2.5}$$

Explorons cette équation plus en détail à travers un exemple simple. Supposons que nous ayons un petit objet d'une masse de 1 gramme (0,001 kilogrammes). En appliquant l'équation d'Einstein, nous pouvons calculer l'équivalent énergétique de cette masse :

$$E = (0,001\,\mathrm{kg}) \times (3 \times 10^8\,\mathrm{m/s})^2 = 9 \times 10^{13}\,\mathrm{J} \tag{2.2.6}$$

Cette quantité d'énergie étonnamment grande souligne l'impact profond de l'Équation 2.2.5. Elle démontre qu'une petite masse peut produire une énorme quantité d'énergie lorsqu'elle est convertie à l'aide de cette équation. Cette équation joue un rôle pivot dans la compréhension des réactions nucléaires, telles que celles se produisant dans les étoiles et les centrales nucléaires, où de minuscules changements de masse entraînent des libérations d'énergie substantielles.

L'équation d'Einstein, avec sa capacité à relier la masse et l'énergie, reste une pierre angulaire de la physique moderne, influençant profondément notre compréhension du fonctionnement de l'univers.

Bien que la Relativité Restreinte nous ait permis d'explorer des aspects fascinants du cosmos en nous guidant à travers des voyages à des vitesses proches de celle de la lumière et en révélant comment l'espace-temps se courbe en réponse à notre mouvement, elle est confinée à un cadre spécifique, celui des cadres de référence inertiels et des mouvements rectilignes uniformes. Cependant, que se passe-t-il lorsque la gravité entre en jeu ? Comment la structure de l'espace-temps évolue-t-elle en présence d'objets massifs ou d'une courbure significative ? C'est là qu'intervient la Relativité Générale d'Albert Einstein dans la section suivante.

2.3 Introduction à la Relativité Générale

2.3.1 Une Révolution dans la Physique

La loi de Newton est une théorie qui fonctionne bien dans de nombreuses situations, comme expliqué à la Section 2.1, mais elle ne peut pas expliquer certains phénomènes observés à des vitesses proches de celle de la lumière ou en présence de champs gravitationnels intenses. La Relativité Générale (RG) d'Albert Einstein est une théorie plus complète qui englobe ces effets gravitationnels. Pierre angulaire de la physique moderne, la Relativité Générale a révolutionné notre compréhension de la gravité et de l'univers. Proposée par Albert Einstein en 1915, cette théorie est basée sur le principe selon lequel la gravité est une manifestation de la courbure de l'espace-temps, induite par la présence de masse et d'énergie. L'équation de champ d'Einstein, au cœur de cette théorie, décrit comment la matière et l'énergie influencent la géométrie de l'espace-temps et, à leur tour, comment cette géométrie courbée guide le mouvement de la matière et de l'énergie.

En effet, l'équation de champ d'Einstein, publiée pour la première fois le 25 novembre 1915, est l'équation différentielle partielle principale de la relativité générale [5] :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.3.1}$$

5. Les différents termes de cette relation seront explicités par la suite.

Cette courbure de la géométrie autour d'une source de matière est alors interprétée comme le champ gravitationnel de cette source. Le mouvement des objets dans ce champ est très précisément décrit par leur équation géodésique. La métrique $g_{\mu\nu}$ produit une famille de géodésiques. Il est à noter que les particules ayant une masse gravitationnelle positive ou négative se comporteraient de la même manière en suivant les mêmes géodésiques lorsqu'elles sont déviées par le potentiel gravitationnel créé par une masse significative M, par exemple dans la gravité terrestre ou solaire. Ainsi, un objet massif, comme une étoile, influence l'espace-temps non seulement par sa masse mais aussi par l'énergie qu'il émet, comme le rayonnement. En relativité générale, l'énergie d'un objet - y compris son énergie de masse au repos représentée par mc^2 et toute forme supplémentaire d'énergie comme le rayonnement - contribue au champ gravitationnel qu'il produit. Cette contribution combinée de l'énergie et de la masse est ce qui courbe l'espace-temps autour de l'objet. Son second terme tient compte du contenu de l'univers en chaque point de l'espace-temps :

- **S'il n'est pas nul**, alors la solution géométrique qui émerge de cette équation décrira l'intérieur d'une masse.
- **S'il est nul**, la solution induite par cette équation se référera à une portion complètement vide de l'univers autour de cette masse.

2.3.2 Effets Observables & Confirmations Expérimentales

Parmi les phénomènes expliqués par la RG figure la déviation du plan de rotation de la planète Mercure lorsqu'elle est au plus proche du Soleil, connue sous le nom de précession du périhélie. Ce phénomène a été mesuré avec une précision de 45 secondes d'arc par siècle, une valeur qui ne pouvait pas être expliquée par la loi de Newton.

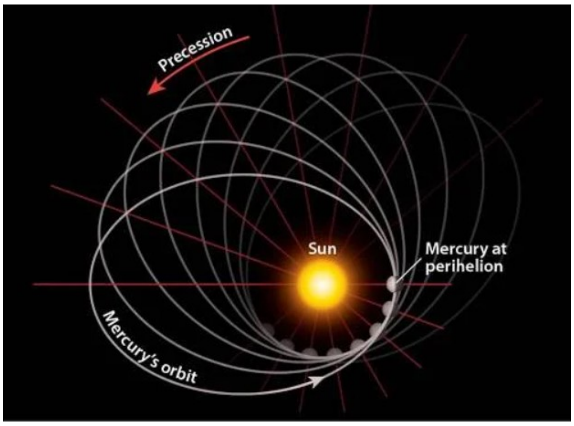


FIGURE 2.1 – Précession du périhélie de Mercure

Un autre phénomène observé est la courbure apparente de la lumière autour du Soleil. Lors de l'éclipse solaire de 1919, Sir Arthur Eddington a remarqué que les rayons lumineux semblaient se courber autour du Soleil. En réalité, ces rayons lumineux suivent les chemins les plus courts dans l'espace-temps courbé, connus sous le nom de géodésiques. Cette courbure apparente de la lumière est due à la déformation de l'espace-temps causée par la présence de masse, un effet que la RG a expliqué avec précision ([23]).

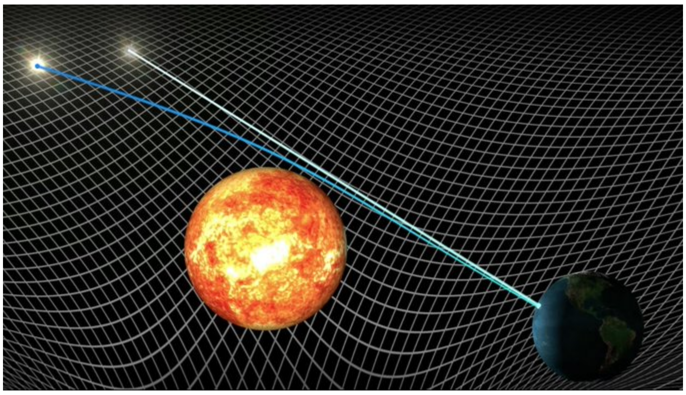


FIGURE 2.2 – Courbure de la Lumière Stellaire durant l'Éclipse Solaire

Ces phénomènes sont considérés comme non linéaires car ils ne peuvent être expliqués que par la théorie de la RG. Cependant, dans des conditions où les effets relativistes sont négligeables, la loi de Newton peut fournir des approximations valables. Ainsi, la RG a élargi notre compréhension de la gravité au-delà des limites de la loi de Newton, ouvrant la voie à une meilleure compréhension des interactions gravitationnelles à grande échelle et à des vitesses élevées.

2.3.3 Géométrie de l'Espace-Temps & Équation des Géodésiques

Rappelons le principe d'équivalence d'Einstein concernant un cadre inertiel en chute libre :

> *"Dans un champ gravitationnel, il est toujours possible en tout point de l'espace-temps de choisir un système de coordonnées localement inertiel tel que, dans une région suffisamment petite, les lois de la physique sont identiques à celles en l'absence de gravité."*

Dans ce cadre de référence en chute libre, la force inertielle ressentie par un corps en chute libre annule la force gravitationnelle, signifiant que l'objet n'est soumis à aucune force (état d'apesanteur). Par conséquent, le cadre inertiel est le cadre fondamental pour étudier les objets en interaction (appelé cadre de la relativité restreinte) avant de les analyser dans un second cadre galiléen connu sous le nom de *"cadre de laboratoire"*, où ces objets sont soumis aux effets de la gravité. Ce dernier cadre est, en fait, accéléré vers le haut ($a = -g$) par rapport au cadre inertiel naturel (imaginez que *"le sol sur Terre vous accélère vers le haut"*).

Dans la théorie de la relativité restreinte, un cadre inertiel est décrit par la métrique de Minkowski, qui est une représentation mathématique de l'espace-temps plat. Cette métrique s'applique dans les régions où les effets de la gravité sont absents. Dans un tel contexte, les trajectoires des objets sont déterminées par les équations du mouvement dérivées des principes de la relativité restreinte. Alors que le terme *"géodésique"* est utilisé en relativité générale pour l'espace-temps courbé sous l'effet de la gravité, dans la métrique de Minkowski de la relativité restreinte, ces trajectoires sont mieux décrites comme des lignes droites représentant un mouvement à vitesse constante. Dans ce cadre, les objets dans les cadres inertiels se déplacent en ligne droite à vitesse constante, un cas particulier d'une géodésique dans l'espace-temps plat.

Cadre Inertiel et Coordonnées

Tout d'abord, positionnons-nous dans ce cadre inertiel et définissons les coordonnées d'une masse ponctuelle dans ce cadre : Nous considérons les coordonnées ξ^α avec $\xi^0 = ct$, $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$, $\xi^3 = z$ dans le cadre de notre analyse. Puisque ce corps n'est soumis à aucune force (vitesse constante), nous pouvons en déduire que :

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} = 0 \tag{2.3.2}$$

Avec

$$\mathrm{d}\tau^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \tag{2.3.3}$$

Où τ correspond à la métrique ou à l'intervalle dans cet espace, que nous pourrions également noter s, et il est important de noter que cette métrique est invariante quel que soit le cadre de référence.

Transformation de Coordonnées vers un Cadre de Référence de Laboratoire Accéléré

Appliquons maintenant une transformation de coordonnées dans un nouveau cadre de référence galiléen de laboratoire *"accéléré vers le haut"* par rapport au cadre de référence inertiel précédent :

$$x^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Cependant, chaque coordonnée du nouveau cadre galiléen dépend des coordonnées du cadre inertiel et vice versa :

$$x^\mu(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad \xi^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Et il faut se rappeler que ξ dépend de τ :

$$\xi^\mu(\tau)(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Ainsi, chaque paramètre de ξ dans le nouveau cadre de référence dépend également de τ. Par conséquent, nous pouvons en déduire que :

$$\frac{\mathrm{d}\xi^0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\xi^0}{\partial x^0} + \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\xi^0}{\partial x^1} + \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\xi^0}{\partial x^2} + \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\xi^0}{\partial x^3} \tag{2.3.4}$$

Cela peut être exprimé en utilisant la convention de sommation d'Einstein pour les indices répétés :

$$\frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \underbrace{\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}}_{\substack{\text{convention} \\ \text{de sommation} \\ \text{d'Einstein}}} \tag{2.3.5}$$

NB : En mathématiques, la convention de sommation d'Einstein est une manière de représenter de manière compacte la sommation d'une série de termes. Lorsqu'un indice apparaît à la fois comme un indice inférieur et comme un indice supérieur dans une expression, cela implique généralement une sommation sur cet indice, signifiant que toutes les valeurs possibles de cet indice sont additionnées. Cette notation est couramment utilisée dans divers domaines des mathématiques et de la physique pour simplifier la représentation d'équations impliquant des indices répétés.

Maintenant, nous souhaitons dériver par rapport à τ l'expression 2.3.5 :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} \tag{2.3.6}$$

Or $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2}$ donc, d'après 2.3.2, nous pouvons en déduire que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0 \tag{2.3.7}$$

Nous appliquons alors 2.3.5 pour $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}$ en utilisant cette fois la variable muette ν :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \tag{2.3.8}$$

2.3.7 devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0 \tag{2.3.9}$$

Soit :

$$\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0 \tag{2.3.10}$$

Pour réaliser la sommation sur les indices répétés comme suit :

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{3} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \tag{2.3.11}$$

Nous devons effectuer cette opération :

$$\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}\right) = 0 \tag{2.3.12}$$

Cependant, pour $\beta \neq \mu$, les dérivées partielles d'une coordonnée par rapport à une autre coordonnée dans le même système de coordonnées sont nulles (par exemple, $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$), et pour $\beta = \mu$, la dérivée partielle est égale à 1. Ceci correspond au symbole de Kronecker (δ^β_μ) :

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} = \delta^\beta_\mu \tag{2.3.13}$$

NB : Lorsque β et μ représentent des coordonnées différentes dans le même système de coordonnées, la dérivée partielle de β par rapport à μ est nulle, car cela signifie que ces coordonnées sont mutuellement indépendantes dans le système. Cependant, lorsque β et μ représentent la même coordonnée, la dérivée partielle est égale à 1, ce qui indique que la coordonnée change avec elle-même, comme représenté par le symbole δ^β_μ.

Ainsi, nous obtenons :

$$0 = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}\right) \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \delta^\beta_\mu \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} \tag{2.3.14}$$

Cependant, si nous remplaçons μ par β ($\beta = \mu$), alors $\delta^\beta_\mu = \delta^\beta_\beta = 1$, et $\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\mathrm{d}^2 x^\beta}{\mathrm{d}\tau^2}$. Ainsi, nous obtenons :

$$0 = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}\right) \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}^2 x^\beta}{\mathrm{d}\tau^2} \tag{2.3.15}$$

Par conséquent, en introduisant les *symboles de Christoffel* comme suit :

$$\Gamma^\beta_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{2.3.16}$$

Nous pouvons déduire l'*équation des géodésiques* suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\beta}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\beta_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{2.3.17}$$

Ceci représente une expression générale pour les *symboles de Christoffel* $\Gamma^\beta_{\mu\nu}$ en termes des dérivées des fonctions de transformation de coordonnées. Les symboles de Christoffel, comme nous le verrons plus tard, sont utilisés dans les mathématiques de la relativité générale et de la géométrie différentielle pour décrire comment les systèmes de coordonnées changent localement.

Que nous apprend cette équation des géodésiques ?

— La seconde dérivée des coordonnées dans le référentiel Galiléen *"accéléré"* n'est plus nulle mais est égale à l'équivalent des forces inertielles appliquées en relativité générale (dans ce cas, la gravité). D'après 2.3.17, nous pouvons déduire :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\beta}{\mathrm{d}\tau^2} = -\Gamma^\beta_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \tag{2.3.18}$$

En effet, si x^μ et x^ν sont des coordonnées spatiales, alors leur dérivée par rapport à τ correspond à une *"vitesse"*.

— Tout objet en mouvement dans le référentiel Galiléen *"accéléré"* de laboratoire obéira à cette équation lorsqu'il est soumis à la force de gravité terrestre.

— La forme de cette équation nous informe sur les chemins les plus courts ou les plus longs (extrema) sur une surface courbe (variété). Plus précisément, les géodésiques correspondent à des chemins stationnaires dont les propriétés physiques restent constantes dans le temps (absence de forces externes appliquées).
— Nous pouvons décrire la gravité comme un effet purement géométrique lié aux géodésiques parcourues par les objets dans l'espace-temps courbé (la façon dont l'espace-temps est courbé est décrite par les symboles de Christoffel). Une analogie serait de considérer deux objets parcourant des chemins parallèles et identiques à la même vitesse depuis un point sur Terre vers le Nord ; ils finiront par se croiser au pôle Nord en raison de la courbure de la Terre. Ce croisement peut être analysé soit par le fait qu'une force les a attirés (analogie avec la mécanique newtonienne) soit par un effet purement géométrique lié à la courbure de la Terre (analogie avec la mécanique relativiste). Selon la relativité générale, la gravité est donc une courbure de l'espace-temps qui fait que les objets en mouvement rectiligne local suivent ces géodésiques. La relativité générale nous permet de déterminer la courbure de l'espace-temps en fonction de ses composants (matière, énergie) puis de décrire les trajectoires des particules en mouvement dans cet espace-temps.
— Les symboles de Christoffel sont calculés à partir de la métrique et de ses dérivées partielles, capturant des informations sur la courbure de l'espace-temps. Ils nous permettent de calculer comment les géodésiques sont affectées par la courbure de l'espace-temps.

2.3.4 Définition des Tenseurs

Les *tenseurs* sont des objets mathématiques issus de l'algèbre multilinéaire qui ont été introduits en physique pour représenter l'état de contrainte et de déformation d'un volume soumis à des forces, d'où leur nom (tensions).

Afin d'illustrer la nature d'un *tenseur*, envisageons une fonction tensorielle T qui associe deux vecteurs [6] $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à un scalaire [7] $T(\vec{u},\vec{v})$ dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. Cette fonction doit respecter les conditions de linéarité suivantes :

— La fonction produit un scalaire, c'est-à-dire $T(\vec{u},\vec{v}) \in \mathbb{R}$.

— La multiplication de l'un des vecteurs par un scalaire α doit être conforme à la propriété de linéarité suivante :

$$T(\alpha\vec{u},\vec{v}) = \alpha T(\vec{u},\vec{v}) \tag{2.3.19}$$

— L'addition de deux vecteurs dans l'un des arguments de la fonction se distri-

6. Ce sont des tenseurs de rang 1 qu'on peut représenter comme une liste de nombres (composantes) qui changent d'une manière spécifique à chaque changement de système de coordonnées.

7. Ce sont des tenseurs de rang 0 qui sont simplement des nombres réels ou complexes et ne changent pas en fonction du système de coordonnées utilisé.

bue linéairement de la manière suivante :

$$T(\vec{u}+\vec{w},\vec{v}) = T(\vec{u},\vec{v}) + T(\vec{w},\vec{v}) \tag{2.3.20}$$

Un *tenseur* peut donc être défini comme une application ou une fonction dans un espace vectoriel [8] qui associe un ensemble de vecteurs à un scalaire et doit obéir aux propriétés de linéarité suivantes :

— Lorsqu'un des vecteurs est multiplié par un scalaire, le tenseur multiplie le résultat par ce même scalaire.

— Lorsqu'une opération d'addition est appliquée à un des vecteurs, le tenseur distribue l'addition à travers le résultat de l'opération sur les deux vecteurs.

Dans ce contexte, notre tenseur est dit d'ordre 2, ce qui signifie qu'il prend en paramètres deux vecteurs, et est ainsi qualifié de *bilinéaire.* Un tenseur d'ordre 1 correspond à un vecteur. Il existe également des tenseurs qui peuvent accepter trois ou n vecteurs en tant que paramètres [9].

Ainsi, les tenseurs permettent de généraliser les *scalaires* et les *vecteurs* :

— **Scalaires** :

Considérons 2 systèmes de coordonnées dont l'un x'^{μ} correspond à la transformation du premier x^{μ} selon la relation suivante :

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} \tag{2.3.21}$$

Le scalaire permet de passer un point d'un système de coordonnées S vers un nouveau système de coordonnées S'. En effet, si on souhaite passer un point M d'un système de coordonnées cartésiennes S : $x^{\mu}(x, y)$ vers un nouveau système de coordonnées polaires S' : $x'^{\mu}(r, \theta)$ suivant la figure 2.3.

8. Un *espace vectoriel* est une collection de vecteurs, qui sont des objets qui peuvent être additionnés ensemble et multipliés (« étirés » ou « contractés ») par des nombres, appelés scalaires dans ce contexte. Les scalaires sont souvent pris comme des nombres réels, mais il peut y avoir des cas avec des scalaires complexes ou d'autres types. Dans un espace vectoriel, chaque combinaison linéaire de vecteurs doit aussi être un vecteur dans cet espace.

9. Ces derniers sont appelés tenseurs d'ordre supérieur, allant jusqu'à l'ordre n

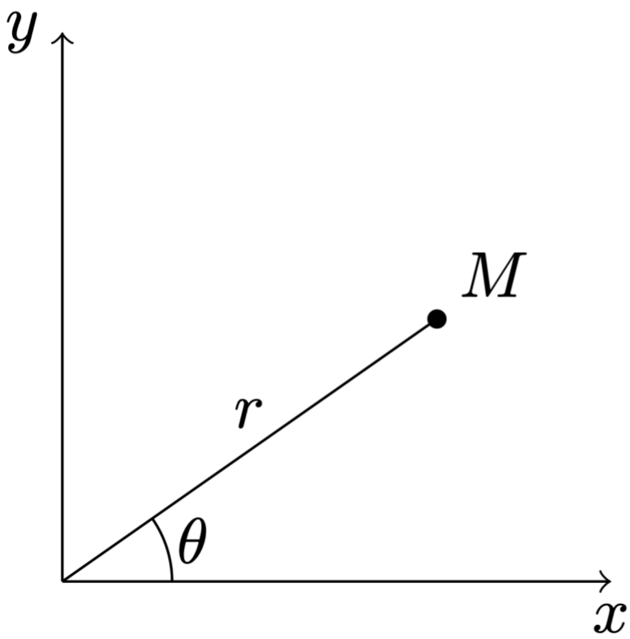


FIGURE 2.3 – Coordonnées Polaires

Il faut opérer cette transformation :

$$S'(x'^{\mu}) = S(x^{\mu}) \tag{2.3.22}$$

— **Vecteurs** :

Considérons la figure 2.4 suivante :

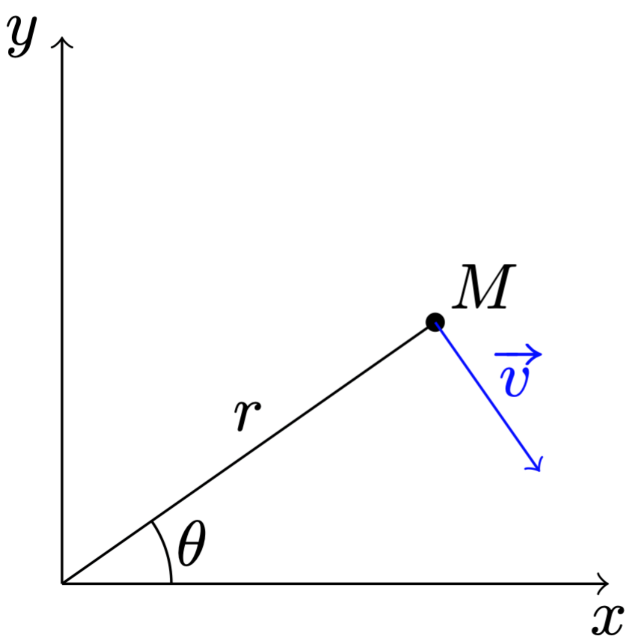


FIGURE 2.4 – Vecteur en Coordonnées Polaires

Exprimons les coordonnées du vecteur en fonction de r, θ dans le nouveau système de coordonnées ainsi qu'en fonction de nouveaux vecteurs de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$\vec{v}(x, y) = v_x(x, y)\vec{u}_x + v_y(x, y)\vec{u}_y \tag{2.3.23}$$

$$\vec{v'}(r, \theta) = v_r(r, \theta)\vec{u}_r + v_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta \tag{2.3.24}$$

Ainsi, un scalaire est un simple nombre qui est associé à chaque point de l'espace, tandis qu'un vecteur est caractérisé par sa longueur, sa direction et son sens dans l'espace.

La transformation des vecteurs d'un système de coordonnées à un autre est donc une opération plus élaborée que la transformation des scalaires. Il y a principalement deux types de vecteurs, chacun avec sa propre règle de transformation :

— **Vecteurs contravariants** : ceux-ci se transforment par dérivation des coordonnées du nouveau référentiel x'^μ par rapport à celles de l'ancien x^ν. La loi de transformation est donnée par :

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu \tag{2.3.25}$$

— **Vecteurs covariants** : dans ce cas, la transformation est effectuée par dérivation des coordonnées de l'ancien référentiel x^ν par rapport à celles du nouveau x'^μ. La règle de transformation est exprimée par :

$$v'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} v_\nu \tag{2.3.26}$$

Ces relations illustrent comment les vecteurs contravariants et covariants se transforment sous un changement de coordonnées.

Démonstration. Considérons un vecteur de déplacement élémentaire qui relie 2 événements distincts dans l'espace-temps séparés par $(\mathrm{d}t', \mathrm{d}x', \mathrm{d}y', \mathrm{d}z')$ qu'on peut noter collectivement sous la forme $\mathrm{d}x'^\mu$, alors :

$$\mathrm{d}x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \mathrm{d}x^\nu \tag{2.3.27}$$

Or, la différentielle totale d'une fonction $f(x, y, z)$, qui mesure les variations de f en fonction de ses variables x, y, z, intègre également les changements de ses variables implicites selon la relation suivante [10] :

10. En effet, lorsque les variables x, y, z sont elles-mêmes des fonctions d'une autre variable implicite, t, une variation de t entraîne une variation de chacune des variables x, y, z via leurs dérivées par rapport à t. En d'autres termes, la variation de t se traduit par des variations dans x, y, z qui sont quantifiées par leurs dérivées par rapport à t. Par conséquent, la différentielle totale de f en fonction de t implique l'utilisation des dérivées partielles de f par rapport à ses variables x, y, z, ainsi que les dérivées de ces variables par rapport à t, pour capturer l'effet complet des variations de t sur f

$$\mathrm{d}f(x(t),y(t),z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \quad (2.3.28)$$

D'où le vecteur de déplacement élémentaire contravariant [11] :

$$\mathrm{d}x'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\mathrm{d}x^{\nu} \Leftrightarrow v'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}v^{\nu}$$

□

Nous allons maintenant démontrer que la norme du vecteur $\vec{v}$ est donnée par la relation suivante :

$$v_{\mu}v^{\mu} = ||\vec{v}||^2 \quad (2.3.29)$$

Démonstration. Considérons un repère non orthogonal (Oxy) de la figure 2.5 dans lequel le vecteur $\vec{v}$ a des composantes covariantes et contravariantes.

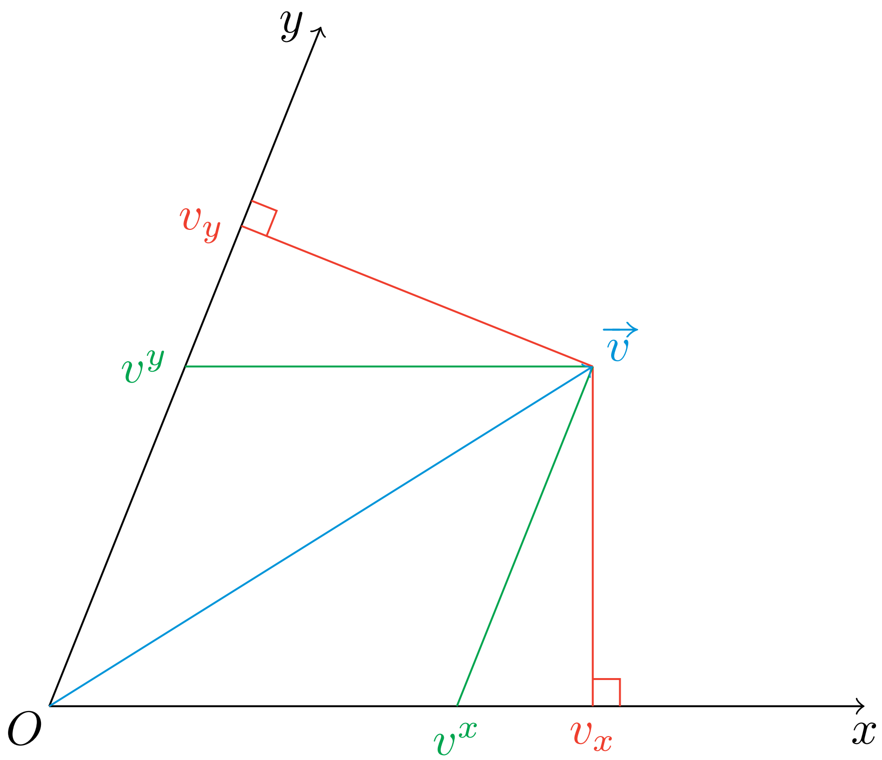


FIGURE 2.5 – $||\vec{v}||^2 = v_x v^x + v_y v^y$

11. Où μ peut prendre les valeurs 0,1,2,3.

Ainsi, nous obtenons :

$$v^2 = h^2 + v_y^2 \tag{2.3.30}$$
$$(v^x)^2 = h^2 + (v_y - v^y)^2 \tag{2.3.31}$$
$$(v^x)^2 = h^2 + v_y^2 + (v^y)^2 - 2v_y v^y \tag{2.3.32}$$
$$(v^x)^2 = v^2 + (v^y)^2 - 2v_y v^y \tag{2.3.33}$$
$$v^2 = (v^x)^2 - (v^y)^2 + 2v_y v^y \tag{2.3.34}$$

Or le second triangle rectangle nous permet d'obtenir la relation suivante :

$$v^2 = (v^y)^2 - (v^x)^2 + 2v_x v^x \tag{2.3.35}$$

En sommant les 2, nous pouvons donc en déduire que :

$$v^2 = v_x v^x + v_y v^y \tag{2.3.36}$$

□

Ainsi, un tenseur de rang 2 nous permet simplement de manipuler deux indices au lieu d'un :

— **Covariant** :
$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta} \tag{2.3.37}$$
— **Contravariant** :
$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} \tag{2.3.38}$$
— **Mixte** :
$$T'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\beta}_{\alpha} \tag{2.3.39}$$

Nous déduisons donc qu'un tenseur de rang 2 est, par essence, une matrice ou un tableau à deux indices qui représente une quantité physique dans un espace donné.

Observons la transformation d'un tenseur de rang 2 d'un système de coordonnées vers un autre, qui utilise les dérivées partielles $\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}$ et $\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}$ pour établir comment les coordonnées dans le nouveau système x'^μ sont reliées aux coordonnées dans l'ancien système x^α. En appliquant cette transformation au tenseur de rang 2 initial $T_{\alpha\beta}$, nous obtenons un nouveau tenseur $T'_{\mu\nu}$ de même rang dans le nouveau système de coordonnées.

A présent, pour effectuer une transformation tensorielle permettant de passer de sa forme contravariante à sa forme covariante, ou inversement (en utilisant la sommation implicite sur ν), il est nécessaire d'introduire le tenseur métrique [12], dont les relations suivantes illustrent cette transformation :

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \tag{2.3.40}$$
$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu \tag{2.3.41}$$

12. qui sera étudié dans la section 2.3.5.

En effet, comme nous l'étudierons dans la section suivante, la définition du tenseur métrique [13] est exprimée par la relation 2.3.54.

Essayons d'exprimer ce tenseur métrique dans un autre référentiel en considérant 2.3.13 :

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x'^\nu} \tag{2.3.42}$$

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \tag{2.3.43}$$

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \tag{2.3.44}$$

D'où :

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\sigma\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \tag{2.3.45}$$

$$\tag{2.3.46}$$

Ce qui démontre bien que $g'_{\mu\nu}$ est bien un tenseur puisque les égalités tensorielles (entre tenseurs de même type) sont vraies dans tous les référentiels.

Propriétés des tenseurs :

- Toute combinaison linéaire de tenseurs est un tenseur [14].
- Le produit de deux tenseurs donne un tenseur de rang supérieur. Par exemple, pour un tenseur de rang 2, $T_{\mu\nu}$, où μ et ν peuvent prendre chacun 4 valeurs, le produit avec un autre tenseur de rang 2 aboutit à un tenseur de rang 4 avec $4 \times 4 = 16$ composantes, donnant un total de $16 \times 16 = 256$ composantes. Ainsi, si deux tenseurs de rang 2 sont multipliés, le tenseur résultant est de rang 4. Le nombre total de composantes du nouveau tenseur est le produit du nombre de composantes des deux tenseurs initiaux.
- La contraction de deux tenseurs donne un tenseur [15] selon la relation suivante :

$$T_{\mu\alpha}V^{\alpha\nu} = W_\mu^\nu \tag{2.3.47}$$

2.3.5 Tenseurs Métriques

Nous allons maintenant nous pencher sur les tenseurs métriques et leur lien avec les symboles de Christoffel précédemment déterminés.

Considérons la métrique de Minkowski décrite à l'aide des coordonnées spatio-temporelles d'un objet en mouvement dans un référentiel inertiel, comme le montre l'équation (2.3.3), et exprimée ainsi :

$$\mathrm{d}\tau^2 = (\mathrm{d}\xi^0)^2 - (\mathrm{d}\xi^1)^2 - (\mathrm{d}\xi^2)^2 - (\mathrm{d}\xi^3)^2 \tag{2.3.48}$$

13. qui transforme les coordonnées d'un référentiel inertiel vers un référentiel quelconque comme galiléen.

14. Si on considère deux tenseurs $A_{\mu\nu}$ et $B_{\mu\nu}$, et deux scalaires a et b, alors $C_{\mu\nu} = aA_{\mu\nu} + bB_{\mu\nu}$ est également un tenseur. Cette propriété découle de la définition des tenseurs en termes de leur comportement sous transformation des coordonnées, qui préserve les opérations linéaires.

15. par sommation implicite sur les indices correspondants α des deux tenseurs.

Elle peut également être écrite de cette manière, où on peut l'exprimer sous forme d'une sommation sur les indices α et β :

$$\mathrm{d}\tau^2 = \eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}\xi^\alpha\mathrm{d}\xi^\beta \tag{2.3.49}$$

Cette équation utilise le tenseur métrique $\eta_{\alpha\beta}$ de l'espace de Minkowski (qui décrit l'espace-temps plat en relativité restreinte) pour calculer l'intervalle spatio-temporel $\mathrm{d}\tau^2$ en termes des différentielles des coordonnées $\mathrm{d}\xi^\alpha$ et $\mathrm{d}\xi^\beta$. Le tenseur métrique de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ a des composantes qui sont -1 pour les intervalles de type temps et $+1$ pour les intervalles de type espace sur la diagonale, et 0 hors de la diagonale comme ceci :

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.3.50}$$

Rappelons que les expressions suivantes représentent les règles de transformation différentielle entre deux systèmes de coordonnées. Elles démontrent comment un petit changement dans l'ensemble des coordonnées x^μ et x^ν entraîne un petit changement dans un autre ensemble de coordonnées ξ^α et ξ^β.

$$\mathrm{d}\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu \tag{2.3.51}$$

$$\mathrm{d}\xi^\beta = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\mathrm{d}x^\nu \tag{2.3.52}$$

Maintenant, si nous substituons ces deux formes différentielles dans l'expression 2.3.49, nous pouvons en déduire l'expression suivante :

$$\mathrm{d}\tau^2 = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \tag{2.3.53}$$

D'où l'on peut extraire le tenseur métrique suivant :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \tag{2.3.54}$$

Le tenseur métrique joue un rôle fondamental en relativité générale car il détermine la géométrie de l'espace-temps et comment la gravité agit entre deux objets situés aux coordonnées x^μ et x^ν dans le même cadre de référence. Il permet la transformation des coordonnées de ces objets en la distance qui les sépare, tout en tenant compte de la courbure locale de l'espace-temps, qui peut varier en fonction de la distribution de la matière et de l'énergie. Contrairement à l'intuition classique, la distance entre deux points dans l'espace-temps courbé dépend de cette courbure et peut varier considérablement. Ainsi, le tenseur métrique est un outil mathématique crucial pour calculer l'intervalle entre deux événements, ce qui inclut également la mesure du temps écoulé entre eux en présence d'un champ gravitationnel.

Étant donné que les indices μ et ν sont muets et répétés, ils sont soumis à la convention de sommation d'Einstein et peuvent donc être interchangés dans l'expression du tenseur métrique. Cela implique que le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ est symétrique [16].

NB : Désormais, notons $g^{\mu\nu}$ comme l'inverse de $g_{\mu\nu}$, qui est exprimé par la relation suivante avec une sommation sur l'indice répété α, produisant le symbole de Kronecker :

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{2.3.55}$$

où δ^{μ}_{ν} est le symbole de Kronecker, qui, comme nous l'avons vu précédemment, est égal à 1 lorsque $\mu = \nu$ et 0 autrement. Cette relation définit la nature de l'inverse du tenseur métrique en géométrie différentielle et en relativité générale.

2.3.6 Symboles de Christoffel

Les symboles de Christoffel, notés $\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}$, sont dérivés du tenseur métrique et fournissent des informations essentielles sur la géométrie de l'espace-temps. Ils ne sont pas eux-mêmes des tenseurs mais sont dérivés du tenseur métrique, qui est un vrai tenseur.

Pour calculer les symboles de Christoffel, nous prenons les dérivées partielles des composantes du tenseur métrique, puis appliquons une combinaison spécifique de ces dérivées. La formule pour les symboles de Christoffel du second genre est donnée par :

$$\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right) \tag{2.3.56}$$

Chaque terme implique une dérivée partielle du tenseur métrique par rapport aux coordonnées, et $g^{\beta\alpha}$ est l'inverse du tenseur métrique, garantissant que nous sommes en train de sommer sur les indices appropriés. Comme nous le verrons plus tard, les symboles de Christoffel jouent un rôle central dans la détermination des géodésiques, qui décrivent la trajectoire des particules et de la lumière dans l'espace-temps courbé et sont utilisés dans les équations du mouvement en Relativité Générale.

Démonstration. Nous allons maintenant exprimer les symboles de Christoffel en termes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$. Pour ce faire, nous considérons la dérivée partielle de $g_{\mu\nu}$ par rapport aux coordonnées x^{λ}. Cette opération introduit les dérivées secondes des fonctions de transformation de coordonnées ξ^{α}, qui peuvent ensuite être intégrées dans l'expression des symboles de Christoffel 2.3.16.

Avant de commencer nos calculs, voici quelques astuces préliminaires pour les simplifier :

— Le tenseur métrique est symétrique, donc $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.
— Pour remplacer ν par α, nous devons d'abord substituer l'indice muet existant α par σ.

16. $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$

Nous obtenons le tenseur métrique comme suit :

$$g_{\alpha\mu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \tag{2.3.57}$$

En appliquant la règle du produit pour la dérivation, et en se rappelant que $\eta_{\sigma\beta}$ est une constante, nous obtenons :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \right) \tag{2.3.58}$$

Nous voyons apparaître les dérivées partielles secondes attendues dans le second membre de l'équation (deux fois) :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} \tag{2.3.59}$$

Pour intégrer l'expression des symboles de Christoffel 2.3.16 dans cette relation, nous devons appliquer la transformation suivante aux deux membres pour isoler la dérivée partielle et introduire une somme sur l'indice répété β :

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \Gamma^\beta_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\boldsymbol{\beta}}}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^{\boldsymbol{\beta}}} \right) \tag{2.3.60}$$

Or, nous savons que :

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \xi^\lambda} = \delta^\sigma_\lambda \tag{2.3.61}$$

et selon 2.3.55, ce symbole de Kronecker est égal à 1 lorsque $\sigma = \lambda$, donc :

$$\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\beta} \Gamma^\beta_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{2.3.62}$$

Nous pouvons alors le remplacer dans l'expression 2.3.59, en veillant à reformuler les indices correspondants dans la nouvelle expression de manière analogue :

$$\frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^{\boldsymbol{\rho}}} \Gamma^{\boldsymbol{\rho}}_{\mu\nu} \tag{2.3.63}$$

$$\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^{\boldsymbol{\rho}}} \Gamma^{\boldsymbol{\rho}}_{\nu\alpha} \tag{2.3.64}$$

NB : Nous ne plaçons pas β sur le symbole de Christoffel car c'est un indice de sommation muet dans le terme où nous voulons l'attribuer, donc nous choisirons une autre lettre, ρ :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^{\boldsymbol{\beta}}}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} \tag{2.3.65}$$

Finalement, nous pouvons déduire de 2.3.59 :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho_{\nu\alpha} \tag{2.3.66}$$

Ainsi, la différentiation du tenseur métrique peut s'exprimer de 3 manières différentes (les 2 dernières impliquant de nouveaux indices en échangeant ν et μ et en remplaçant μ par α) :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} = g_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + g_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\alpha} \tag{2.3.67}$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} = g_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + g_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\alpha} \tag{2.3.68}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = g_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\alpha\nu} + g_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\alpha} \tag{2.3.69}$$

Ces trois manières d'exprimer cette différentiation nous permettent d'obtenir un résultat simplifié en ajoutant les deux premières et en soustrayant la dernière : 2.3.67 + 2.3.68 - 2.3.69 :

$$g_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right) \tag{2.3.70}$$

$$g^{\beta\alpha}g_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)g^{\beta\alpha} \tag{2.3.71}$$

$$\delta^{\beta}_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)g^{\beta\alpha} \tag{2.3.72}$$

Soit, finalement :

$$\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\beta\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right) \tag{2.3.73}$$

Cette expression du symbole de Christoffel[17] nous permet d'établir un lien entre la courbure de l'espace-temps induite par la force gravitationnelle et les dérivées spatiales du tenseur métrique. Elle est essentielle pour formuler les équations régissant les géodésiques dans la théorie de la Relativité Générale. □

Exemple de Calcul des Symboles de Christoffel pour une Métrique Sphérique :

Dans les coordonnées sphériques, l'élément de ligne $\mathrm{d}s^2$ pour un espace tridimensionnel est exprimé comme suit :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}\\
&\mathrm{d}s^2 = g_{11}(\mathrm{d}x^1)^2 + 2g_{12}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 + 2g_{13}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3 + g_{22}(\mathrm{d}x^2)^2 + 2g_{23}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 + g_{33}(\mathrm{d}x^3)^2\\
&\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2
\end{aligned} \tag{2.3.74}$$

où $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}\phi$ sont les différentielles de la coordonnée radiale r, de l'angle polaire θ et de l'angle azimutal ϕ, respectivement. Le tenseur métrique correspondant $g_{\mu\nu}$ en coordonnées sphériques est diagonal et est donné par :

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta)\end{bmatrix} \tag{2.3.75}$$

17. Également connue sous le nom de connexion affine.

Démonstration. La relation entre les coordonnées cartésiennes et sphériques peut être déduite de la Figure 2.6 :

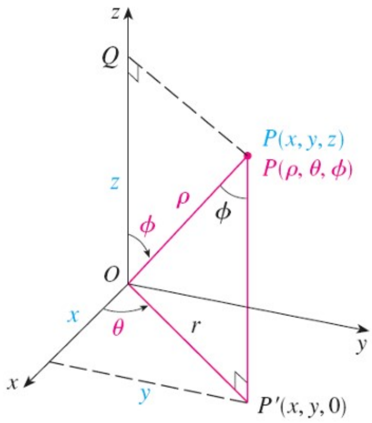


FIGURE 2.6 – La position du point P est définie par la distance ρ et les angles θ (colatitude) et ϕ (longitude)

Si nous considérons les triangles OPQ et OPP', nous avons : $z = \rho \cos \phi$, $r = \rho \sin \phi$, où $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned} \tag{2.3.76}$$

En utilisant les notations physiques selon la Figure 2.9, la transition vers les coordonnées cartésiennes est donnée par :

$$\begin{aligned} x &= r \sin \phi \cos \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \phi \end{aligned} \tag{2.3.77}$$

Cependant, la métrique en coordonnées cartésiennes est donnée par :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{2.3.78}$$

Pour exprimer ceci en coordonnées sphériques, nous remplaçons x, y et z par leurs équivalents en coordonnées sphériques, donnant 2.3.74. □

Pour calculer les symboles de Christoffel $\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}$, nous trouvons d'abord l'inverse du tenseur métrique, qui pour une métrique diagonale est simplement :

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{bmatrix} \tag{2.3.79}$$

Pour le tenseur métrique donné, nous calculons les dérivées partielles requises pour les symboles de Christoffel :

$$\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = 2r,$$
$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} = 2r\sin^2(\theta),$$
$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} = 2r^2\sin(\theta)\cos(\theta).$$

En insérant ces dérivées partielles dans la formule de calcul des symboles de Christoffel 2.3.73, nous les obtenons en sommant sur l'indice répété α. Pour le tenseur métrique donné, la plupart des symboles de Christoffel seront nuls car il est diagonal et ne dépend que de r et θ. Les symboles de Christoffel non nuls sont :

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r \tag{2.3.80}$$
$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -r\sin^2(\theta) \tag{2.3.81}$$
$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r} \tag{2.3.82}$$
$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin(\theta)\cos(\theta) \tag{2.3.83}$$
$$\Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r} \tag{2.3.84}$$
$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot(\theta) \tag{2.3.85}$$

NB :

— Le symbole de Christoffel $\Gamma^r_{\theta\theta}$ est calculé comme suit :

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{rr}\left(-\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r}\right)$$

puisque la seule dérivée non nulle de $g_{\theta\theta}$ est par rapport à r. En substituant les valeurs, nous obtenons :

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial(r^2)}{\partial r}\right) = -r.$$

— Un autre exemple est le symbole de Christoffel $\Gamma^\theta_{r\theta}$, qui est calculé comme suit :

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\left(\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^\theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^\theta}\right)$$

où le seul terme non nul est $\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r}$. Cela nous donne :

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}\right)(2r) = \frac{1}{r}.$$

Calcul du Tenseur de Riemann, du Tenseur de Ricci et du Scalaire de Ricci

Dans cet espace sphérique, tous les composantes du tenseur de Riemann et du tenseur de Ricci, ainsi que le scalaire de Ricci, sont nuls, illustrant la géométrie d'un espace plat.

Démonstration. Le tenseur de courbure de Riemann est défini par l'expression :

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \tag{2.3.86}$$

Prenons par exemple les symboles de Christoffel fournis par 2.3.80 :

$$\begin{aligned} \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} &= -\sin(\theta)\cos(\theta), \\ \Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta r} &= \frac{1}{r} \end{aligned} \tag{2.3.87}$$

Nous pouvons procéder au calcul des composantes du tenseur de Riemann. Par exemple, nous pouvons calculer $R^{\theta}_{r\theta r}$:

$$R^{\theta}_{r\theta r} = \partial_{\theta}\Gamma^{\theta}_{rr} - \partial_{r}\Gamma^{\theta}_{\theta r} + \Gamma^{\theta}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{rr} - \Gamma^{\theta}_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta r} \tag{2.3.88}$$

Ainsi, pour le calcul du composant du tenseur de Riemann $R^{\theta}_{r\theta r}$, nous avons :

- Le premier terme $\partial_{\theta}\Gamma^{\theta}_{rr}$ est nul car Γ^{θ}_{rr} est nul.
- Le deuxième terme $\partial_{r}\Gamma^{\theta}_{\theta r}$ implique la dérivée partielle de $\Gamma^{\theta}_{\theta r}$ par rapport à r, qui est $-\frac{1}{r^2}$.
- Le troisième terme est la somme sur λ de $\Gamma^{\theta}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{rr}$, mais comme Γ^{λ}_{rr} est nul pour $\lambda \neq r$, ce terme est nul.
- Le quatrième terme est la somme sur λ de $\Gamma^{\theta}_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta r}$, qui pour $\lambda = \theta$ donne $\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}$.

La somme des deux termes non nuls (termes 2 et 4) est :

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0$$

Ainsi, le composant $R^{\theta}_{r\theta r}$ du tenseur de Riemann est nul.

Le tenseur de Ricci, obtenu en contractant le tenseur de Riemann sur son premier et troisième indice, est donné par :

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \tag{2.3.89}$$

Enfin, le scalaire de Ricci, qui est la trace du tenseur de Ricci, est calculé comme suit :

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{2.3.90}$$

Comme le tenseur de Riemann est nul, il s'ensuit que le tenseur de Ricci et son scalaire sont également nuls.

□

Code de calcul Mathematica :

```
(*Importation du package*)
(*------------------------------*)
Needs["OGRe`"]
(*Definition des coordonnees*)
TNewCoordinates["Spherical", {r, \[Theta], \[Phi]}]
```

```
(*Definition du Tenseur Metrique*)TShow@
 TNewMetric["SphericalMetricTensor", "Spherical",
  DiagonalMatrix[{1, r^2, r^2 Sin[\[Theta]]^2}]]
(*Element de ligne*)
TLineElement["SphericalMetricTensor"]
(*Calcul des symboles de Christoffel*)
TList@TCalcChristoffel["SphericalMetricTensor"]
(*Calcul du Tenseur de Riemann*)
TList@TCalcRiemannTensor["SphericalMetricTensor"]
(*Calcul du Tenseur de Ricci*)
TList@TCalcRicciTensor["SphericalMetricTensor"]
(*Calcul du Scalaire de Ricci*)
TList@TCalcRicciScalar["SphericalMetricTensor"]
```

2.3.7 Application de l'Équation des Géodésiques dans la Limite des Champs Faibles

Nous notons l'expression du symbole de Christoffel et de l'équation des géodésiques comme suit :

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma} \right) \tag{2.3.91}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\lambda}}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{2.3.92}$$

où

$$\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} = g_{\mu\sigma,\nu} \tag{2.3.93}$$

NB :

- Cette équation représente la dérivée partielle du composant du tenseur métrique $g_{\mu\sigma}$ par rapport à la coordonnée x^{ν}, et elle est souvent écrite avec une virgule suivie de l'indice de différentiation, qui dans ce cas est ν. La notation à virgule $g_{\mu\sigma,\nu}$ est un raccourci courant en relativité générale pour désigner les dérivées partielles des composantes du tenseur.
- Dans le contexte de la relativité restreinte, il est courant d'utiliser un système d'unités où la vitesse de la lumière c est définie comme égale à 1 ($c = 1$). Cela simplifie les équations et permet d'exprimer plus facilement certaines quantités. Dans ce système d'unités, les distances sont exprimées en unités de temps (par exemple, années-lumière au lieu de mètres) en raison de l'équivalence $c = 1$. Pour cela, le temps doit être exprimé en secondes, et les unités de longueur deviennent une distance parcourue par la lumière en une seconde, ce qui est exprimé en secondes-lumière (équivalent à *"années-lumière"*). Nous pouvons ainsi exprimer la métrique comme suit :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 = g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^{\mu} \mathrm{d}x^{\nu} \tag{2.3.94}$$

Néanmoins, nous considérerons maintenant que le temps t, exprimé jusqu'à présent, sera le temps propre τ dans l'expression de la métrique, afin de l'exprimer comme suit :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \tag{2.3.95}$$

Nous allons maintenant démontrer que l'équation 2.3.92 se réduit à l'équation newtonienne du mouvement lorsque les champs gravitationnels sont faibles et statiques [18], et lorsque les vitesses sont beaucoup plus petites que la vitesse de la lumière [19], ce qui peut être exprimé comme suit :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \textit{avec} \quad h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu} \tag{2.3.96}$$

NB : Dans la théorie de la gravité linéarisée, nous partons du principe que l'espace-temps est presque plat. Pour cela, nous représentons le tenseur métrique total $g_{\mu\nu}$ comme la somme de la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, qui décrit l'espace-temps plat comme vu précédemment, et une petite *"perturbation"* $h_{\mu\nu}$, qui représente les écarts à cette platitude dus à la présence de masse ou d'énergie. Nous verrons cela plus tard dans l'étude du répulseur dipolaire pour un système stationnaire (Section 3.3).

En intégrant ce tenseur métrique dans l'expression 2.3.91, nous réalisons que les dérivées partielles du tenseur métrique dépendent uniquement de $h_{\mu\nu}$, puisque $\eta_{\mu\nu}$ est constant et ses dérivées sont nulles. Ainsi, dans la théorie linéarisée de la gravité, les symboles de Christoffel peuvent être approximés en considérant uniquement les contributions de la perturbation $h_{\mu\nu}$. Cela est dû au fait que les symboles de Christoffel sont définis par les premières dérivées du tenseur métrique, et dans un champ gravitationnel faible, $h_{\mu\nu}$ est petit par rapport à $\eta_{\mu\nu}$. Ainsi, lorsque nous calculons les symboles de Christoffel pour un champ gravitationnel faible, nous négligeons les dérivées de $\eta_{\mu\nu}$ et ne prenons en compte que les dérivées de $h_{\mu\nu}$. Nous obtenons donc :

$$g_{\mu\sigma,\nu} = h_{\mu\sigma,\nu} \quad \textit{et} \quad g_{\mu\nu,\sigma} = h_{\mu\nu,\sigma} \quad \textit{et} \quad g_{\nu\sigma,\mu} = h_{\nu\sigma,\mu} \tag{2.3.97}$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\sigma} + h^{\lambda\sigma})(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}) \tag{2.3.98}$$

Étant donné que $h_{\mu\nu}$ est petit, nous réalisons que le produit de $h^{\lambda\sigma}$ avec ses dérivées partielles contribuera à des termes d'ordre deux ou supérieur (par exemple, h^2, h^3, etc.). Ces termes d'ordre supérieur seront significativement plus petits par rapport aux termes d'ordre un que nous recherchons. Par conséquent, lors du calcul des symboles de Christoffel, nous négligeons les produits de $h_{\mu\nu}$ et de ses dérivées, ce qui implique que les contributions de $h^{\lambda\sigma}$ sont négligeables par rapport à celles de $\eta^{\lambda\sigma}$. Nous obtenons ainsi :

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}) \tag{2.3.99}$$

Cette approximation simplifie le processus de calcul de la courbure de l'espace-temps dans les champs gravitationnels faibles et est fondamentale dans l'analyse des

18. En relativité restreinte, où $g_{\mu\nu}$ est très proche de $\eta_{\mu\nu}$ et indépendant du temps.
19. $v/c \ll 1$

ondes gravitationnelles, où les perturbations $h_{\mu\nu}$ représentent des ondulations dans la courbure de l'espace-temps.

Considérons maintenant 2 cas :

— Pour $\lambda = 0$, qui correspond à la coordonnée temporelle en relativité générale, l'équation des symboles de Christoffel du premier genre devient spécifique à la coordonnée temporelle. En utilisant le tenseur métrique de Minkowski η et la perturbation h, le symbole de Christoffel pour $\lambda = 0$ est donné par l'équation :

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{0\sigma}\left(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}\right) \tag{2.3.100}$$

Étant donné que $\eta^{0\sigma}$ n'est pas nul seulement lorsque $\sigma = 0$, ce qui conduit à $\eta^{00} = 1$, nous obtenons la relation suivante :

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu} - h_{\mu\nu,0}\right) \tag{2.3.101}$$

Cependant, étant donné que le champ gravitationnel est statique[20], la dérivée partielle du tenseur métrique par rapport au temps ($\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}$) est nulle. Cela nous permet de considérer le système comme étant dans un régime stationnaire par rapport à la métrique de l'espace-temps :

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu}\right) \tag{2.3.102}$$

— Pour les coordonnées spatiales désignées par $\lambda = i$ (où i, j, k représentent des indices spatiaux), les symboles de Christoffel peuvent être calculés en utilisant la métrique de perturbation $h_{\mu\nu}$. Le tenseur métrique de Minkowski $\eta^{i\sigma}$ est utilisé pour élever l'indice, et il est égal à -1 lorsque les indices correspondent. Ainsi, les symboles de Christoffel pour les coordonnées spatiales sont donnés par :

$$\Gamma^i_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{i\sigma}\left(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}\right) \tag{2.3.103}$$

Cependant, compte tenu du signe négatif des composants spatiaux de $\eta^{i\sigma}$, l'équation pour $\sigma = i$ se simplifie à :

$$\Gamma^i_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(h_{\mu i,\nu} + h_{\nu i,\mu} - h_{\mu\nu,i}\right) \tag{2.3.104}$$

Ce signe négatif reflète la convention de signe opposée pour les composants spatiaux du tenseur métrique de Minkowski par rapport au composant temporel.

Intégrons maintenant ces résultats dans l'équation des géodésiques 2.3.92 pour chaque cas :

— Pour $\lambda = 0$, nous savons que $x^\lambda = x^0 = ct$, alors :

$$c^2\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{2}\left(h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu}\right)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{2.3.105}$$

20. La métrique de l'espace-temps ne varie pas avec le temps.

Cependant, le produit suivant générera une somme sur les indices répétés μ et ν de quantités d'ordres 0, 1 et 2 :

$$(h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu}) \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} \tag{2.3.106}$$

Considérant que les quantités d'ordre supérieur, en particulier d'ordre 1 et 2, sont hautement négligeables, surtout qu'elles sont basées sur la quantité déjà petite $h_{\mu\nu}$ qui est beaucoup plus petit que $\eta_{\mu\nu}$, nous ne retiendrons que les termes d'ordre zéro. Dans ce contexte, l'ordre zéro fait référence aux termes où μ et ν sont tous les deux égaux à 0, ce qui correspond aux composants temporels. Cette simplification nous mène à l'équation suivante :

$$c^2 \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{2} \left(h_{00,0} + h_{00,0} \right) c^2 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{2.3.107}$$

Dans cette approximation, seuls les termes impliquant la coordonnée temporelle contribuent de manière significative à l'équation du mouvement, simplifiant l'analyse des géodésiques de l'espace-temps dans un champ gravitationnel faible.

Cependant, étant donné que le champ gravitationnel est statique, ces quantités sont nulles, alors :

$$c^2 \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}s^2} = 0 \tag{2.3.108}$$

Cela implique que t est proportionnel à s, ce qui signifie :

$$s = ct \tag{2.3.109}$$

— Pour les coordonnées spatiales désignées par $\lambda = i$, à partir de 2.3.109, nous obtenons :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{2} \left(h_{\mu i,\nu} + h_{\nu i,\mu} - h_{\mu\nu,i} \right) \frac{1}{c^2} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.3.110}$$

Cependant, comme mentionné précédemment, nous ne conserverons que les quantités d'ordre 0 pour μ et ν qui sont égaux à 0. En raison de la nature statique des champs gravitationnels, nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{2} h_{00,i} = 0 \tag{2.3.111}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{c^2}{2} h_{00,i} \tag{2.3.112}$$

Puisque i est un indice spatial prenant les valeurs 1, 2 ou 3, nous trouvons ainsi une forme d'équivalence *"Accélération - Force"* qui peut être représentée sous forme vectorielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} \phi \tag{2.3.113}$$

avec

$$\phi = \frac{c^2 h_{00}}{2} \tag{2.3.114}$$

Le lien entre le potentiel gravitationnel et la composante temporelle du tenseur métrique peut être établi en introduisant 2.3.114 dans 2.3.96, nous obtenons ainsi :

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \tag{2.3.115}$$

Le potentiel gravitationnel ϕ est équivalent à une vitesse au carré (c^2). Sachant que $h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$, nous pouvons vérifier localement que pour la Terre, $h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} = \frac{2G \cdot M_t}{R_t \cdot c^2} = 10^{-9} \ll \eta_{00} = 1$ en utilisant l'expression bien connue pour le calcul du potentiel gravitationnel :

$$\phi = \frac{GM}{R} \tag{2.3.116}$$

2.3.8 Les Solutions de Karl Schwarzschild & Ludwig Flamm

Karl Schwarzschild a développé une solution géométrique complète à l'équation 2.3.1, consistant en deux métriques publiées dans deux articles séparés [21] dont les formes développées [22] sont les suivantes :

— **La première solution** décrit, par la métrique 2.3.117, la géométrie extérieure de l'espace-temps entièrement vide autour d'une masse à symétrie sphérique telle qu'une étoile de rayon r_n, comme illustré sur la figure 2.7 :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{8\pi G\rho r_n^3}{3c^2 r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{8\pi G\rho r_n^3}{3c^2 r}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right) \tag{2.3.117}$$

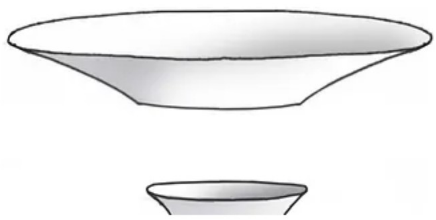


Figure 2.7 – Portion d'une hypersurface de Flamm

— **La deuxième solution**, souvent appelée solution intérieure de Schwarzschild structurée par la métrique 2.3.118, décrit la géométrie de l'espace-temps à l'intérieur d'un corps statique, sphériquement symétrique composé d'un fluide incompressible, tel qu'une étoile de rayon r_n, comme illustré sur la figure 2.8 :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &- \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{8\pi G\rho r^2}{3c^2}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right) \\ &+ \left[\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{8\pi G\rho r_n^2}{3c^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{8\pi G\rho r^2}{3c^2}}\right]^2 c^2 \mathrm{d}t^2 \end{aligned} \tag{2.3.118}$$

21. [75] et [74]
22. [1]

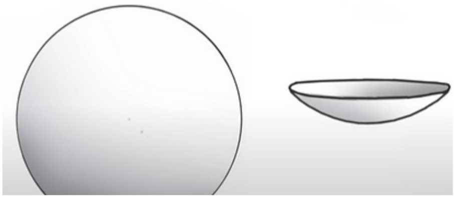


FIGURE 2.8 – Portion d'une sphère

Cette approche implique l'assemblage de deux segments de solutions d'espace-temps, spécifiquement deux régions d'hypersurfaces, chacune caractérisée par leurs métriques distinctes. L'assemblage est effectué à une frontière commune, assurant la continuité de la géométrie de l'espace-temps et la cohérence physique de la solution combinée à travers l'interface.

La même année, un jeune mathématicien a offert sa propre interprétation du travail de Schwarzschild. Son nom était Ludwig Flamm. Son travail et son nom sont restés inconnus de la plupart des spécialistes de la cosmologie pour une raison simple : son article n'a pas été traduit en anglais avant 2015. Il maîtrisait parfaitement la géométrie des hypersurfaces riemanniennes tridimensionnelles ([28],[29]).

Kruskal, s'appuyant sur la métrique extérieure de Schwarzschild, a développé son modèle renommé, considéré comme le fondement de la théorie des trous noirs. En effet, en prolongeant analytiquement la solution extérieure de Schwarzschild, il élimine *"algébriquement"* la singularité de coordonnées trouvée à l'*"horizon des événements"* pour $r = R_s$ (Rayon de Schwarzschild), par l'introduction d'un nouveau système de coordonnées. Ce système est conçu pour rendre la métrique régulière partout, sauf à la *"singularité physique centrale"* pour $r = 0$ ([41],[77]). Mais ce modèle a-t-il vraiment un sens physique ?

2.3.9 Construction des Géodésiques pour la Métrique Extérieure de Schwarzschild

Considérons la métrique extérieure de Schwarzschild (6.53) extraite de [1] (Page 194) :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(\mathrm{d}x^0)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2m}{r}}\right) - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2) \tag{2.3.119}$$

où m est une constante d'intégration simple (une longueur), x^0 est un marqueur chronologique (également une longueur), et s est la longueur mesurée sur l'hypersurface 4D.

Les auteurs écrivent :

$$x^0 = ct \tag{2.3.120}$$

Une géodésique est un chemin inscrit sur l'hypersurface, qui correspond à une longueur minimale :

$$\delta \int \mathrm{d}s = 0 \tag{2.3.121}$$

Cela signifie que cette longueur :

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \, \mathrm{d}\phi^2\right) \right\} \tag{2.3.122}$$

a une valeur minimale le long d'un chemin ainsi paramétré : $t(s)$, $r(s)$, $\theta(s)$, $\phi(s)$.

Écrivons :

$$\dot{t} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}, \quad \dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}, \quad \dot{\phi} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} \tag{2.3.123}$$

Cela revient à rechercher des chemins qui minimisent :

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) \right\} \mathrm{d}s \tag{2.3.124}$$

La quantité entre crochets est :

$$L = L(t, r, \theta, \phi, \dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \quad \text{ou} \quad L = L(x^i, \dot{x}^i) \tag{2.3.125}$$

Ce problème a été résolu par le mathématicien français Lagrange, ce qui a conduit à ce que l'on appelle désormais les *équations de Lagrange*.

Le calcul des géodésiques est un problème d'*"extrémum lié"*. Cela est dû au fait que nous considérons tous les chemins reliant deux points a et b, donc liés à ces points. Les géodésiques sont alors données par les équations :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{2.3.126}$$

Avec :

$$L = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) \tag{2.3.127}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -2r^2 \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 \tag{2.3.128}$$

Les trois premières équations de Lagrange (6.75), (6.76), (6.77) extraites de [1], correspondant aux variables θ, ϕ et t, sont les suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(r^2\dot{\theta}) = r^2 \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 \tag{2.3.129}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}) = 0 \tag{2.3.130}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}\right] = 0 \tag{2.3.131}$$

Si nous divisons chaque terme de la métrique 2.3.119 par ds^2 :

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2\right) \tag{2.3.132}$$

En relativité générale, l'exploitation de la symétrie sphérique d'une solution peut simplifier l'analyse des géodésiques. Dans le cas de la métrique de Schwarzschild, qui est effectivement sphériquement symétrique, cette symétrie peut être exploitée pour réduire le problème à deux dimensions.

La métrique de Schwarzschild, en coordonnées sphériques, dépend des variables r, θ, ϕ, et t. La symétrie sphérique indique que la métrique ne change pas lorsqu'on effectue des rotations autour du centre. Cette propriété nous permet de simplifier le problème en choisissant des géodésiques qui restent dans un plan constant. Il est courant de choisir le plan équatorial pour simplifier les calculs, ce qui correspond à fixer $\theta = \pi/2$. Dans ce plan, la coordonnée θ ne change pas, ce qui signifie que $\mathrm{d}\theta = 0$ et donc la composante de la métrique impliquant $\mathrm{d}\theta$ disparaît (voir la Figure 2.9).

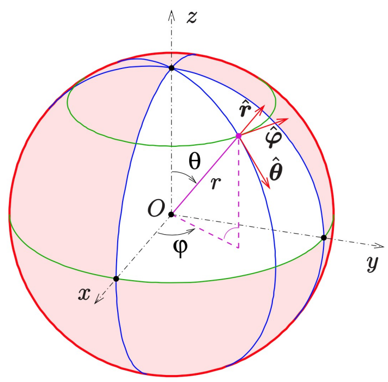


FIGURE 2.9 – Vecteurs unitaires en coordonnées sphériques

Ensuite, en examinant le Lagrangien (qui est une fonction résumant la dynamique d'un système) associé à cette métrique, nous pouvons trouver les équations du mouvement pour les géodésiques. Pour un objet se déplaçant dans le plan équatorial, la composante azimutale de son moment angulaire, liée à ϕ, est conservée, ce qui est une conséquence de la symétrie axiale de la métrique par rapport à l'axe perpendiculaire au plan équatorial. Mathématiquement, cela s'exprime par l'équation :

$$r^2 \dot{\phi} = h = \text{constante} \tag{2.3.133}$$

où h est une constante de mouvement (moment angulaire par unité de masse), r est la coordonnée radiale, et $\dot{\phi}$ est la dérivée de la coordonnée azimutale ϕ par rapport au temps propre s (le temps mesuré par une horloge se déplaçant avec l'objet).

Cela nous indique que la quantité $r^2\dot{\phi}$ reste constante le long de la géodésique.

L'équation 2.3.131 ci-dessus s'intègre et donne :

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = l = \text{constante} \tag{2.3.134}$$

Par substitution, nous obtenons alors l'équation différentielle :

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} c^2 l^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2} \tag{2.3.135}$$

qui donne r en fonction du paramètre s. Mais en utilisant une équation présentée précédemment, nous pouvons passer à une équation différentielle mettant en vedette la dérivée :

$$r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} \tag{2.3.136}$$

De 2.3.133 et 2.3.134, nous obtenons alors :

$$\dot{r} = \dot{\phi} r' = \frac{h}{r^2} r' \tag{2.3.137}$$

Nous pouvons alors obtenir l'équation différentielle reliant r et l :

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = c^2 l^2 - \frac{h^2}{r^4} r'^2 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \tag{2.3.138}$$

Nous pouvons ensuite faire la transition de la variable r à une variable u tel que :

$$u = \frac{1}{r} \quad \Longrightarrow \quad r' = -\frac{u'}{u^2} \tag{2.3.139}$$

Puis, de 2.3.136, nous pouvons déduire :

$$d\phi = \frac{\mathrm{d}r}{r'} = \frac{\mathrm{d}u}{u'} \tag{2.3.140}$$

Ce qui nous amène à :

$$(1 - 2mu) = c^2 l^2 - h^2 u'^2 - h^2 u^2 (1 - 2mu) \tag{2.3.141}$$

qui se réduit à :

$$u'^2 = \left(\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2}\right) + \frac{2m}{h^2} u - u^2 + 2mu^3 \tag{2.3.142}$$

Ainsi, de 2.3.140, l'intégration donne :

$$\phi = \phi_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2} v - v^2 + 2mv^3}} \tag{2.3.143}$$

Ceci constitue une solution exacte de l'équation d'Einstein qui exprime l'angle ϕ en tant qu'intégrale de $u = \frac{1}{r}$. Inversement, cela nous donne u en tant que fonction inverse (implicite) de ϕ, ce qui conduit à des géodésiques *"quasi-elliptiques"*, dépendant des deux constantes d'intégration l et h.

En effet, si h est grand, cela signifie que la géodésique parcourue par une particule de test s'écartera d'une trajectoire de chute libre radiale car elle aura une quantité significative de moment angulaire spécifique. Par conséquent, sa trajectoire sera moins affectée par la force de gravité directement vers le corps central, l'amenant à s'écarter d'une chute radiale directe et à suivre un chemin plus courbé ou *"quasi-elliptique"*.

En ignorant la région à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild (r<2m), il est possible de représenter en 3D les géodésiques planes associées à cette métrique stationnaire. La représentation de la sphère de Schwarzschild peut être envisagée comme un cercle qui se projette dans l'espace-temps le long de la dimension temporelle de Schwarzschild t_s. Si nous considérons une étoile à neutrons avec un rayon de 10 km, elle restera stable à la limite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) d'environ 2 masses solaires. La limite TOV représente la masse maximale critique qu'une étoile à neutrons peut avoir tout en restant stable. Cela place l'*horizon* d'une masse ponctuelle équivalente à une distance de son centre d'environ 6 km ($r_s = \alpha$). Étant donné que le rayon de l'étoile est environ 3/2 fois r_s, nous positionnons l'*horizon* de cet objet à $r_s = 2$ pour un rayon de 3. Cette configuration m'a permis de représenter, à l'aide de Mathematica, la géodésique d'une particule témoin suivant une trajectoire en chute libre vers cet objet, comme illustré par la figure 2.10.

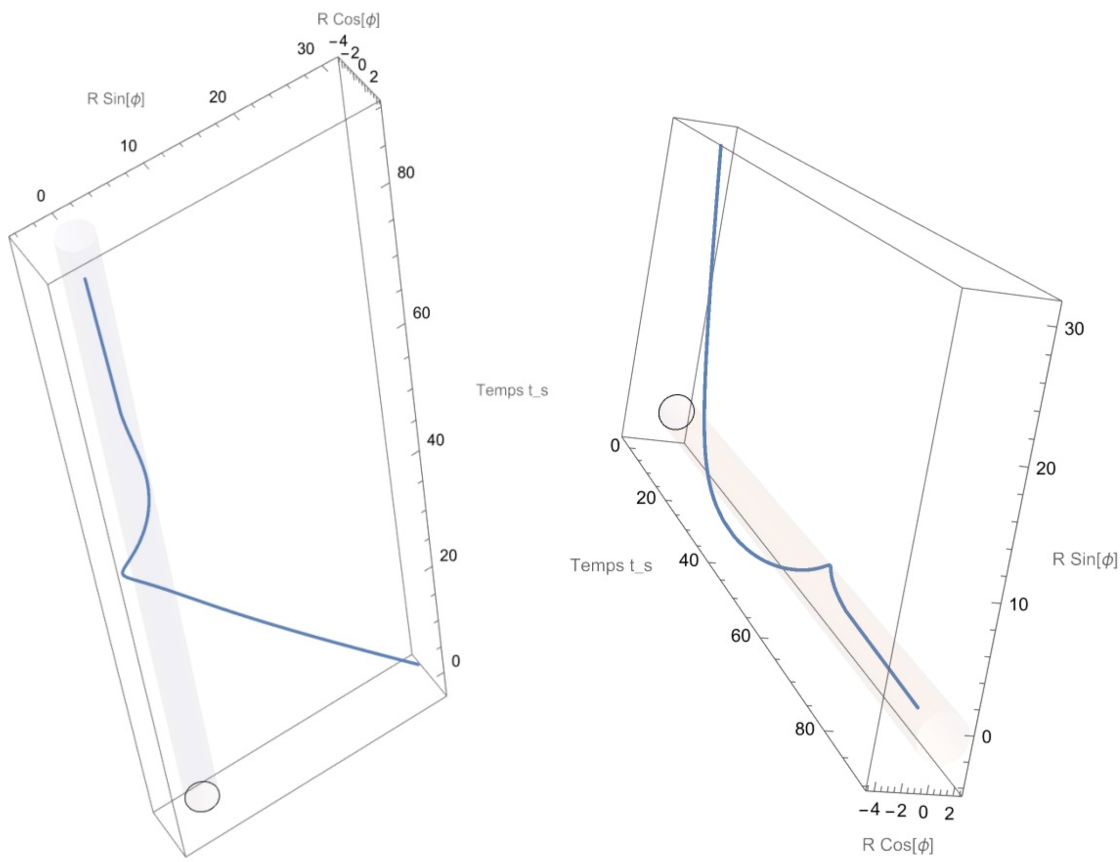


Figure 2.10 – Représentation d'une Géodésique en Chute dans le Système de Coordonnées (r, ϕ, t_s)

Quelle que soit la direction de déplacement de la géodésique, en l'occurrence centripète, avec ce choix de coordonnée temporelle, il faudrait une durée infinie pour s'approcher de la sphère de Schwarzschild. En effet, comme nous pouvons le voir sur les Figures 2.11 et 2.12, pour un observateur lointain, tout objet s'approchant de l'horizon d'une étoile à neutrons proche de sa criticité physique ou d'un objet supermassif, comme ceux dont l'approche alternative sera étudiée au chapitre 8, subirait une dilatation temporelle près de ce qu'on appelle le rayon de Schwarzschild. Cependant, pour l'objet lui-même (ou un observateur se déplaçant avec l'objet), le temps continuerait de progresser normalement (Respectivement, la courbe bleue par rapport à la courbe en pointillé).

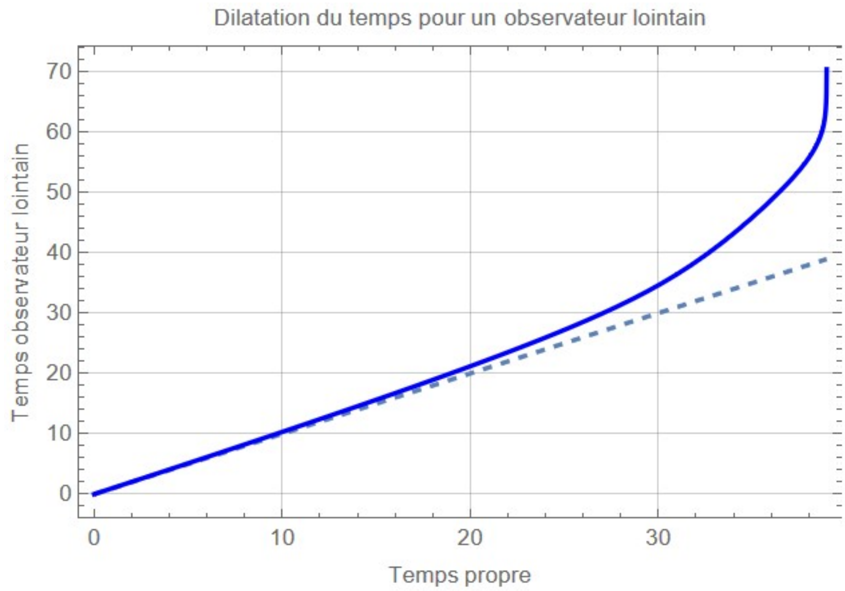


Figure 2.11 – Dilatation Temporelle pour un Observateur Lointain

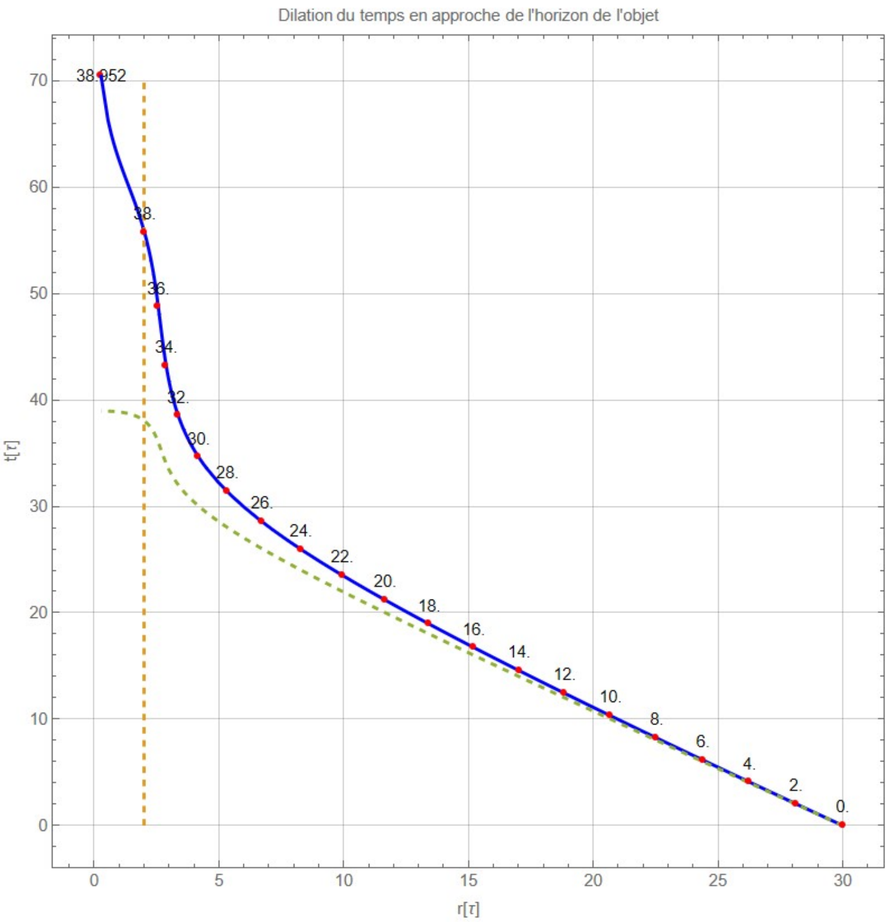


Figure 2.12 – Dilatation Temporelle en Approchant de l'Horizon de l'Objet

Du point de vue de cet observateur lointain, l'objet mettrait apparemment une durée infinie à atteindre cet horizon. En conséquence, il serait perçu comme ralentissant progressivement, apparaissant presque figé ou faisant un arrêt sur image près de l'horizon.

Ce phénomène est une conséquence de la relativité générale, qui prédit que la présence d'une masse significative courbe l'espace-temps. Cette courbure affecte le passage du temps, conduisant à une dilatation temporelle dans des champs gravitationnels intenses.

Cet aspect constitue l'un des piliers de la théorie des trous noirs. Mais existe-t-il une autre alternative ? C'est ce que nous explorerons plus tard au chapitre 6.

2.3.10 La Solution de Roy Kerr

En 1963, Roy Kerr, un éminent mathématicien néo-zélandais, a révolutionné la compréhension de la relativité générale dans le contexte du modèle de trou noir en proposant une nouvelle solution à l'équation du champ d'Einstein. Contrairement à la métrique extérieure de Schwarzschild ([75]), qui est utilisée comme fondement du modèle de trou noir statique et sphériquement symétrique, la solution de Kerr est axi-symétrique, représentant un trou noir en rotation ([38]). Cette découverte était particulièrement significative à l'époque car elle fournissait un modèle plus réaliste pour de nombreux objets célestes.

La métrique de Kerr est exprimée en coordonnées de Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) ([17]), et son élément de ligne est donné pour $c = 1$ par :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &-\left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{4GMar\sin^2\theta}{\rho^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi + \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 \\ &+ \rho^2\mathrm{d}\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \end{aligned} \tag{2.3.144}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 - 2GMr + a^2, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2\cos^2\theta. \end{aligned}$$

M est la masse de l'objet central en rotation, souvent un trou noir, influençant l'espace-temps environnant, et a est le moment angulaire spécifique de l'objet en rotation. Le terme important à noter ici est $-\frac{4GaMr\sin^2\theta}{\rho^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi$, qui représente l'effet d'entraînement de l'espace-temps dû à la rotation de l'objet, typiquement un trou noir. Cette caractéristique peut être interprétée comme une manifestation de l'idée d'Ernst Mach sur la relativité du mouvement, où l'espace-temps lui-même semble être influencé par la présence de matière en mouvement.

La pertinence de la solution de Kerr a été encore soulignée par la découverte des pulsars en 1967, initialement compris comme des étoiles à neutrons tournant à des vitesses incroyablement élevées, parfois atteignant mille rotations par seconde. Bien que la métrique de Kerr soit principalement appliquée au modèle de trou noir, ses implications pour la compréhension d'autres objets astrophysiques compacts, tels que les étoiles à neutrons, sont également significatives.

L'astrophysicien renommé Subrahmanyan Chandrasekhar a salué la solution de Kerr, la considérant comme une avancée majeure dans la recherche mathématique appliquée en physique théorique ([15]).

Ce qui est important de souligner à travers cette approche de Kerr, c'est la possibilité d'explorer d'autres propriétés de représentation, comme l'introduction, par exemple, d'un terme $\mathrm{d}r\mathrm{d}t$ dans la métrique extérieure de Schwarzschild, dont les implications seront étudiées au chapitre 6.

2.4 Les Travaux d'Andrei Sakharov & Jean-Marie Souriau

Le modèle cosmologique Janus compile la théorie de la relativité générale d'Albert Einstein, le travail d'Andrei Sakharov en physique des particules et en cosmologie, ainsi que celui de Jean-Marie Souriau en géométrie symplectique. Selon la théorie des groupes dynamiques, il explique comment l'inversion du temps implique une inversion de l'énergie et donc de la masse.

En effet, l'asymétrie baryonique de l'univers est considérée comme l'un des problèmes les plus significatifs de la physique actuelle. Plus précisément, cela se réfère à l'observation qu'il existe une quantité nette de baryons (particules composées de trois quarks, comme les protons et les neutrons) dans l'univers, mais presque pas d'antibaryons (particules composées de trois antiquarks). L'univers aurait dû être créé avec une quantité égale de matière baryonique et d'antimatière antibaryonique depuis le Big Bang, ce qui aurait conduit à leur annihilation mutuelle, leur masse se transformant en photons. Mais où est passée cette antimatière primordiale ?

Dans les années 1960, les scientifiques ont découvert que le taux de production de matière (à partir de la combinaison de quarks primordiaux) se produit légèrement plus rapidement que le taux de production d'antimatière (à partir de la combinaison d'antiquarks), un phénomène connu sous le nom de *"violation CP"* ([19]). Cela était paradoxal car de tels processus de combinaison étaient auparavant considérés comme symétriques. Cependant, en raison de cette *violation CP*, plus de matière a été synthétisée dans l'univers primordial et a prévalu sur l'antimatière.

Le physicien russe Andrei Sakharov a été le premier, à partir de 1967, à restaurer une symétrie globale, considérant que l'univers n'était pas composé d'une seule entité mais de deux univers jumeaux émanant de la même singularité du Big Bang, ayant deux flèches du temps opposées à partir du moment $t = 0$. La singularité initiale Φ inverse non seulement le temps (*T-symétrie*) mais aussi la parité (*P-symétrie*, également appelée *"énantiomorphie"*) ainsi que la conjugaison de charge (*C-symétrie*, qui transforme une particule en son antiparticule, et vice versa), induisant une *CPT-symétrie* complète ([69],[70],[71]). La *violation de la symétrie CP* est également inversée dans l'univers jumeau, ce qui signifie que l'antimatière a prévalu sur la matière. Il convient de noter que Sakharov s'est concentré sur la description de la *CPT-symétrie* uniquement dans le contexte de la physique des particules, donc sans impliquer la gravitation dans son modèle, de sorte que les univers jumeaux n'interagissent jamais sauf au moment de leur naissance comme sur la Figure 2.13 :

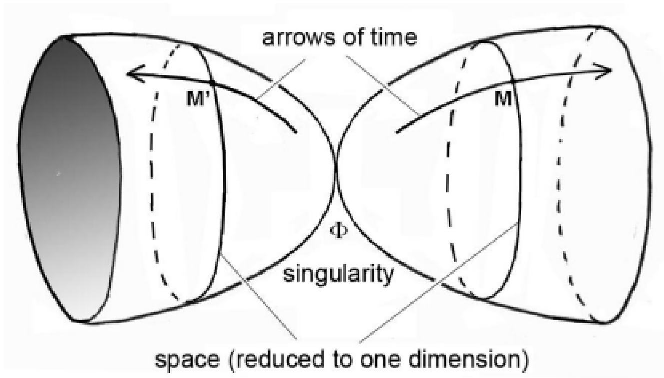


FIGURE 2.13 – Modèle Cosmologique de Sakharov

2.5 Approche Bimétrique Introduite par la Géométrie Riemannienne Hyperbolique

La géométrie riemannienne hyperbolique joue un rôle crucial dans le modèle cosmologique Janus. Cette branche de la géométrie étudie les espaces courbés avec une courbure négative constante. Cette géométrie permet de conceptualiser des espaces avec des courbures à la fois positives et négatives. Cependant, il est important de noter qu'actuellement, il n'existe aucune théorie mathématique bimétrique ou multimétrique introduite dans la géométrie riemannienne hyperbolique sur laquelle un modèle cosmologique bimétrique peut être basé. En effet, les modèles théoriques actuels restent heuristiques. Par exemple, deux approches ont été tentées en 2002 et 2008 par Thibauld Damour ([21]) et Sabine Hossenfelder ([36]), respectivement. L'une était basée sur l'introduction de gravitons lourds et légers dans un système d'équations de champ bimétrique, et l'autre était plus ou moins similaire à notre modèle.

En effet, Damour et Kogan tentent de construire une théorie des *"deux membranes"*, impliquant un spectre de gravitons massifs, mais ce document de 40 pages se termine en queue de poisson. Au passage, ils montrent qu'une telle bigravité doit obéir à un système de deux équations de champ couplées :

$$2M_L^2\left(R_{\mu\nu}(g^L) - \frac{1}{2}g^L_{\mu\nu}R(g^L)\right) + \Lambda_L g^L_{\mu\nu} = t^L_{\mu\nu} + T^L_{\mu\nu} \tag{2.5.1}$$

$$2M_R^2\left(R_{\mu\nu}(g^R) - \frac{1}{2}g^R_{\mu\nu}R(g^R)\right) + \Lambda_R g^R_{\mu\nu} = t^R_{\mu\nu} + T^R_{\mu\nu} \tag{2.5.2}$$

Ensuite, Sabine Hossenfelder propose un modèle raffiné abordant le concept de masse négative dans l'univers. Cependant, en 1957, Hermann Bondi a tenté d'introduire ces masses dans le modèle d'Albert Einstein. Mais, le phénomène dit de fuite révèle des contradictions physiques, que le modèle viole telles que les principes fondamentaux de la physique, comme le principe d'action-réaction et d'équivalence ([10]). Hossenfelder va plus loin pour formuler une paire de nouvelles équations de champ couplées :

$$^{(g)}R_{vk} - \frac{1}{2}g_{vk}{}^{(g)}R = T_{kv} - \underline{V}\sqrt{\frac{h}{g}}a^{v}_{\underline{v}}a^{k}_{\underline{k}} \tag{2.5.3}$$

$$^{(\underline{h})}R_{\underline{vk}} - \frac{1}{2}h_{\underline{vk}}{}^{(\underline{h})}R = \underline{T}_{\underline{vk}} - W\sqrt{\frac{g}{\underline{h}}}a^{k}_{\underline{k}}a^{v}_{\underline{v}}T_{kv} \tag{2.5.4}$$

Ensuite, comme elle n'a pas pu résoudre l'incohérence avec les principes physiques et croyait qu'elle était inextricablement liée à la *"gravité bimétrique"*, elle a abandonné.

Le point commun entre ces deux approches est qu'elles sont purement théoriques et n'ont pas fourni de résultats validés par des observations. Le seul crédit qui peut être attribué à notre modèle cosmologique, par rapport aux deux précédents, est qu'il possède de nombreux points d'ancrage avec l'observation et plusieurs prédictions physiques que nous verrons dans la Section 3.2

La géométrie riemannienne hyperbolique est une branche de la géométrie riemannienne qui étudie les espaces avec une courbure négative constante, correspondant mathématiquement à une forme hyperbolique souvent décrite comme étant *"en forme de selle"*. Plus précisément, la courbure négative constante de l'espace hyperbolique peut être décrite comme le comportement asymptotique de l'hyperbole dans les deux directions : les branches de l'hyperbole divergent indéfiniment sans jamais converger. Cette caractéristique est une propriété importante de l'espace hyperbolique et peut être utilisée pour le distinguer de la géométrie euclidienne et de la géométrie riemannienne sphérique.

Par exemple, sur la Figure 2.14, les lignes rouges dessinant les triangles sont les *géodésiques* de la surface. Pour simplifier, une *géodésique* est le chemin le plus court entre deux points dans l'espace. Imaginez que vous êtes dans un espace euclidien plat, comme sur une grande feuille de papier ; ici, ce chemin est juste une ligne droite. Mais sur des surfaces courbées, qu'elles soient positivement courbées (géométrie sphérique) ou négativement courbées (géométrie hyperbolique comme une selle de cheval), une *géodésique* peut être tracée en utilisant une corde ou un élastique tendu entre deux points sur cette surface, représentant le chemin le plus court. Ainsi, contrairement à la géométrie euclidienne où la somme des angles d'un triangle égale 180 degrés, cette somme dépasse 180 degrés en géométrie sphérique (riemannienne) et est inférieure à 180 degrés en géométrie hyperbolique (également un type de géométrie riemannienne).

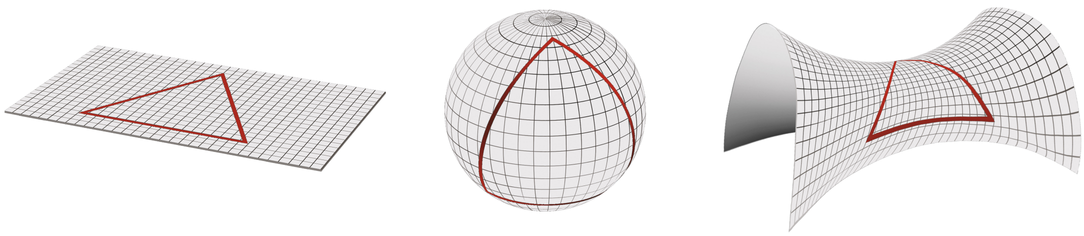


FIGURE 2.14 – Types de Courbure Spatiale

Il est important de noter qu'un espace euclidien *"plat"*[23], n'est pas nécessairement un plan plat. Reprenez l'exemple précédent de la feuille : même si elle est pliée plusieurs fois, comme de la tôle ondulée, sa courbure reste nulle partout. Cela signifie que la *géodésique* tracée sur sa surface ne change pas, car la feuille ne s'étire pas. Il en va de même pour les surfaces euclidiennes fermées comme un cylindre ou un cône : contrairement à ce que l'on pourrait penser, elles n'ont pas de courbure. Selon la géométrie euclidienne, bien qu'elles apparaissent courbées, elles peuvent être considérées comme *"plates"* car leur surface peut être dépliée en un plan sans étirement.

Le concept du Modèle Cosmologique Janus, qui sera développé dans le prochain chapitre, est de l'associer à une *"géométrie géméllaire"* définie par une relation entre des espaces à courbure positive et des espaces à courbure négative, selon un système de deux équations de champ couplées.

23. Un espace à courbure nulle.

Chapitre 3

Modèle Cosmologique Janus

3.1 Description

Le Modèle Cosmologique Janus propose une vision révolutionnaire de l'univers, caractérisée par une variété riemannienne avec deux métriques distinctes. Ces métriques gèrent les masses positives et négatives de manière unique, offrant une interprétation cohérente dans le cadre de la relativité générale, confirmée par les observations, tout en évitant les paradoxes traditionnels.

Basé sur le modèle cosmologique d'Andrei Sakharov de deux univers bimétriques non-interactifs, un nouveau modèle a été développé comme un univers unique constitué d'une seule variété riemannienne à deux métriques, à savoir une hypersurface quadridimensionnelle avec deux couches repliées l'une sur l'autre en *CPT-Symétrie* mais interagissant cette fois par effet gravitationnel.

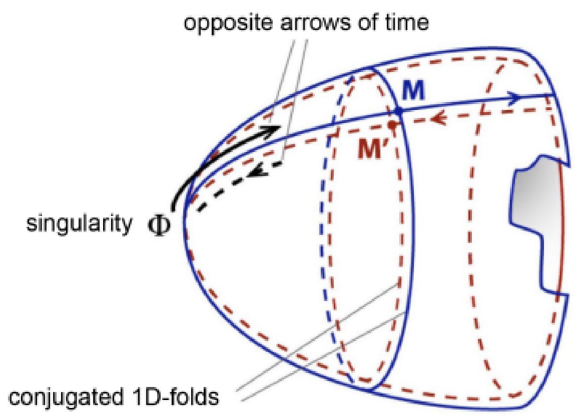


FIGURE 3.1 – Modèle Cosmologique Janus

La première couche est quadrillée avec une certaine unité de longueur fournissant une métrique traversée par la matière d'énergie et de masse positives entre deux points de cet espace-temps à une vitesse c, limitée par la théorie de la relativité restreinte (Section 2.2.2). Et une seconde couche, repliée par dessus mais quadrillée selon une unité de longueur 100 fois plus courte et, qui peut être parcourue à une vitesse 10 fois plus élevée par la matière d'énergie et de masse négatives (les photons évoluant dans les mêmes proportions), donnant ainsi un temps de parcours 1000 fois plus rapide. Ce modèle offre ainsi deux familles de géodésiques traversant l'espace-temps de deux manières différentes et à des vitesses différentes, rendant possible le voyage interstellaire, et expliquant plusieurs phénomènes physiques tels que la disparition de l'antimatière primordiale ainsi que le confinement des galaxies ([53],[57],[56]).

Il démontre également que les états d'énergie négative sont compatibles avec la mécanique quantique.

Ce modèle est construit sur deux équations de champ couplées qui sont une extension de l'équation de champ d'Einstein, offrant une alternative crédible à la présence d'énergie noire (pouvoir répulsif) et de matière noire (aplatissement des courbes de rotation galactique) dans le cosmos tout en intégrant avec succès les masses négatives dans la Relativité Générale.

Il est basé sur la dérivation des équations à partir d'un concept appelé le "*Lagrangien*". En physique, nous utilisons souvent des principes pour expliquer comment les objets ou les particules se déplacent et interagissent les uns avec les autres. Dans notre cas, nous employons des principes variationnels, qui sont des formules mathématiques décrivant comment un système physique évolue dans le temps en minimisant une quantité spécifique appelée "*action*". Ce concept de variation doit être "*covariant*", ce qui signifie qu'il reste le même quel que soit le référentiel inertiel choisi. Cela implique qu'il s'applique à tous les observateurs, indépendamment de leur vitesse.

La dérivation logique de ces principes devrait nous conduire à des équations qui décrivent les mouvements et les interactions d'un système de particules de manière à les rendre valables pour tous les observateurs, indépendamment de leur mouvement relatif. L'"*action*" est définie comme l'intégrale du "*Lagrangien*" sur une certaine période de temps, nous permettant de décrire la cinétique et la dynamique d'un système physique. Le "*Lagrangien*" est une fonction calculée à partir de l'énergie cinétique et potentielle du système, ainsi que d'autres facteurs pouvant influencer son comportement. En utilisant le principe de moindre action, nous cherchons à trouver la trajectoire du système qui minimise "*l'action*", ce qui signifie le chemin pour lequel la valeur de "*l'action*" est la plus faible possible. Les équations du mouvement sont obtenues en différenciant cette trajectoire d'action minimale par rapport au temps.

3.2 Implications

La cosmologie est en crise. En effet, le premier exemple c'est la vitesse d'expansion de l'Univers qui, tel un gigantesque ballon de baudruche, enfle depuis 13,8 milliards d'années. Quand les astrophysiciens ont mesuré avec leurs télescopes le taux actuel de cette expansion, connue sous le nom de constante de Hubble (ou H_0), ils trouvent une valeur incompatible avec celle prédite par le Modèle Standard de la cosmologie (modèle ΛCDM), la théorie qui décrit le mieux pour l'instant l'histoire de l'Univers, depuis son origine (le Big Bang) et les premiers atomes jusqu'à aujourd'hui, en passant par les premières étoiles et galaxies.

La constante de Hubble (H_0) est un paramètre clé en cosmologie qui mesure la vitesse d'expansion de l'Univers. Elle indique à quelle vitesse les galaxies s'éloignent les unes des autres en fonction de leur distance. Or récemment, deux méthodes principales de mesure donnent des résultats significativement différents :

— D'une part, les mesures locales qui utilisent l'observation directe des galaxies et l'échelle des distances cosmologiques basée sur des chandelles standards comme les céphéides et les supernovas de type Ia, donnent une valeur de H_0 de 73 km/s/Mpc[1]. Cette mesure est issue de la collaboration Shoes menée par l'Américain Adam Riess.
— D'autre part, les données du Fond Diffus Cosmologique[2], analysées dans le cadre du Modèle Standard de la cosmologie, suggèrent une valeur plus faible, de 67,4 kilomètres par seconde par mégaparsec (km/s/Mpc). Cette méthode s'appuie sur les données du satellite Planck.

Cette divergence, si elle n'est pas attribuable à des erreurs de mesure, nécessite une réévaluation de certains aspects fondamentaux du Modèle Standard, tels que le rôle de l'énergie noire dans l'accélération de l'expansion cosmique. Le Modèle Cosmologique Janus attribue cet effet anti-gravitationnel aux masses négatives et en précise la nature, un sujet que nous approfondirons ultérieurement dans la section dédiée 3.3.

Autre exemple, le télescope spatial James Webb (JWST), avec ses capacités avancées d'observation dans l'infrarouge, est conçu pour observer l'Univers à des stades très précoces de son évolution, y compris la formation des premières galaxies. Les récentes observations du JWST révèlent des objets ou des comportements qui ne correspondent pas aux prédictions du Modèle Standard, conduisant à une révision complète de ses fondements.

En effet, selon le Modèle Standard de la cosmologie, l'univers a connu une période sombre après le Big Bang, suivie par la formation des premières étoiles et proto-galaxies quelques centaines de millions d'années plus tard. Ces premières structures ont évolué en grandes galaxies au cours du premier milliard d'années, un processus guidé par la gravité de la matière noire. Les galaxies ont continué de se développer et de s'agglomérer pendant des milliards d'années, formant les divers types observés

1. Un mégaparsec équivaut à environ 3,26 millions d'années-lumière. Pour chaque mégaparsec de distance, l'expansion de l'Univers augmente la vitesse de séparation des galaxies de 73 kilomètres par seconde.

2. Le Fond Diffus Cosmologique (CMB) est le rayonnement électromagnétique émis environ 380 000 ans après le Big Bang, lorsque l'univers s'était suffisamment refroidi pour que les électrons et les protons se combinent en atomes.

aujourd'hui. La matière noire et l'énergie noire qui joueraient des rôles cruciaux dans ce processus, influençant respectivement la formation des structures et l'expansion de l'univers.

Or la récente étude publiée dans la revue *Nature Astronomy* [12] évoque la découverte par Mike Boylan-Kolchin, professeur agrégé d'astronomie à l'Université du Texas à Austin, de la formation plus précoce que prévue de plusieurs galaxies à fort redshift (Entre 500 et 700 millions d'années après le Big Bang) bien plus massives que la nôtre (10 milliards de masse solaire).

Par exemple, *Abell 2744 Y1* est un amas de galaxies situé dans la constellation du Sculpteur à environ 13,2 milliards d'années-lumière, et nous apparaît donc telle qu'elle était alors que l'univers n'était âgé que de 650 millions d'années (Figure 3.2 [3])

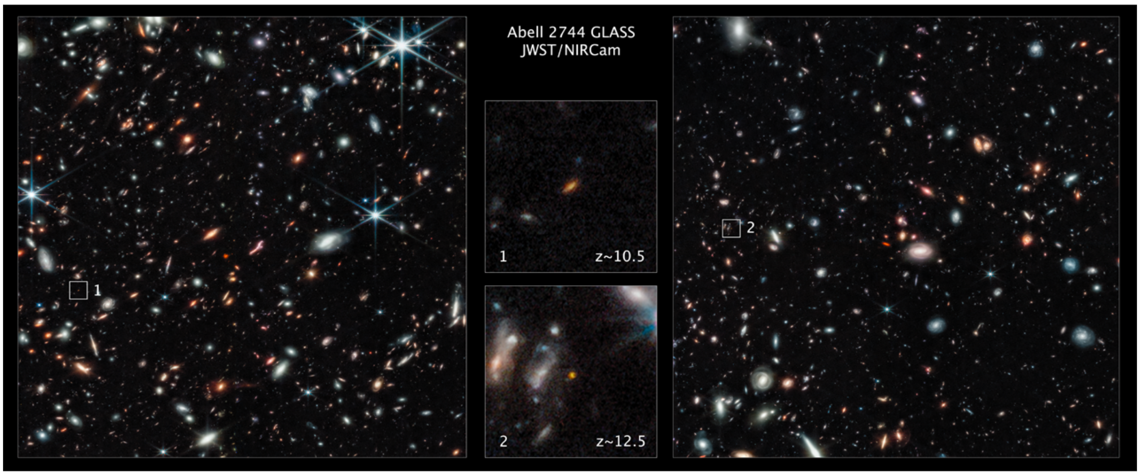


Figure 3.2 – Cliché du télescope James Webb - Abell 2744 Y1

Cette observation du télescope spatial James Webb confirmant une fois de plus une des prédictions du Modèle Cosmologique Janus.

Le Modèle Cosmologique Janus apporte donc un nouvel éclairage sur des questions cosmologiques clés dont les réponses sont confirmées par de nombreuses observations et prédictions dont voici une liste non exhaustive :

— Explication du confinement des galaxies par des espaces lacunaires occupés par des masses négatives contribuant à leur stabilité.

3. https://webbtelescope.org/contents/media/images/2022/044/01GG7S6F5V52E5F489R72X7ZNE

— Explication de la forme des courbes de rotation des galaxies (aplatissement)

— Ce modèle explique l'accélération gravitationnelle plus élevée que prévu des étoiles en orbite aux confins des galaxies en raison de la présence de masses négatives.

— Explication de la vitesse élevée des galaxies au sein des amas en raison de la contribution antigravitationnelle des masses négatives.

— Il propose une description mathématiquement détaillée du comportement des galaxies en s'appuyant sur une approche commune aux équations de Vlasov et de Poisson. Il prédit que les vitesses des étoiles au sein d'une galaxie s'organisent en un ellipsoïde orienté vers le centre galactique, une hypothèse confirmée par la mesure des vitesses résiduelles des étoiles près du système solaire (Voir le chapitre 4).

— Il explique les effets de lentille gravitationnelle autour des galaxies comme sur la figure 3.3.

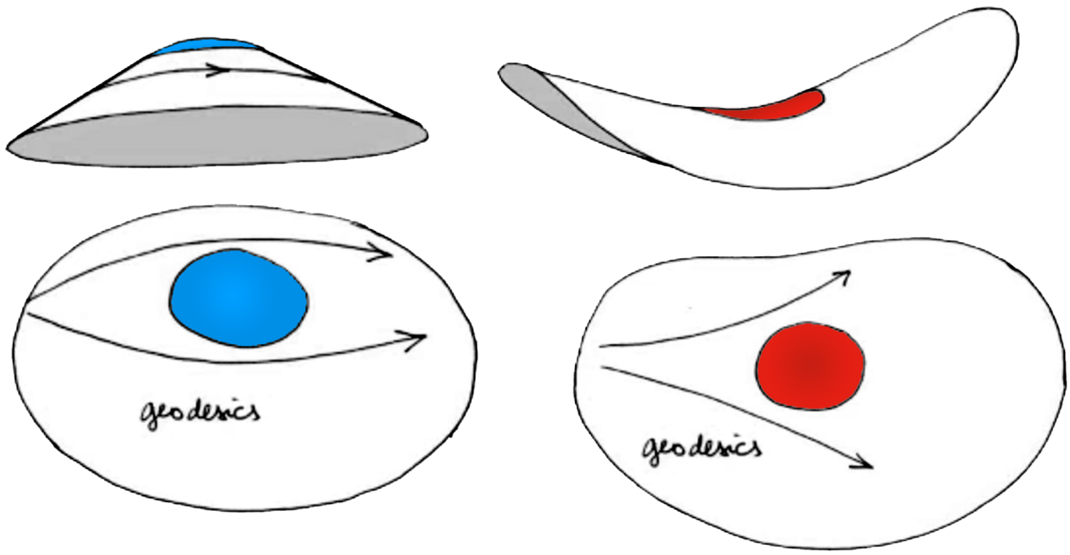


FIGURE 3.3 – Effets de lentille gravitationnelle

— Explication de la structure lacunaire de l'univers occupée par des amas de masses négatives sous forme de bulles de savon interconnectées comme sur la figure 3.4.

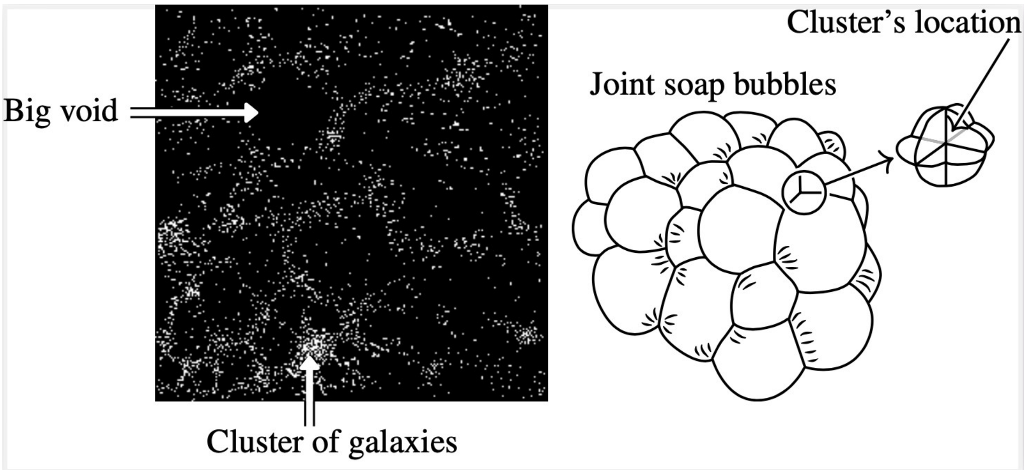


FIGURE 3.4 – Structure lacunaire

Cette structure a également été établie en 2018 par Tsvi Piran dans son article [66], où il met en évidence la distribution des galaxies dans ce qu'il appelle des *"murs"* en raison de la compression antigravitationnelle des régions sous-denses de masses négatives concentrées dans la matière noire des espaces vides. Les observations montrent que ces espaces vides occupent une partie significative du volume de l'Univers. La corrélation entre les vides dans la distribution des galaxies et les régions de faible densité de matière noire démontre clairement l'origine gravitationnelle de ces vides. Les régions sous-denses primordiales, connues sous le nom de *"vides cosmologiques négatifs"*, agissent comme des masses gravitationnelles négatives et servent de germes pour les vides observés. Les centres de ces régions sous-denses sont des masses gravitationnelles effectives qui repoussent la matière, l'alignant le long des murs entre les centres. Les vides sont centrés autour de ces masses et sont entourés par des murs de galaxies. Finalement, les murs se fissurent, provoquant la fusion des espaces vides avec d'autres vides, créant un réseau plus large de vides qui confine les galaxies.

— Prédiction et confirmation de la formation précoce de toutes les galaxies récemment observées par le Télescope Spatial James Webb ([27]). En effet, le modèle suggère que toutes les galaxies se sont formées ensemble pendant les premiers 100 millions d'années de l'histoire de l'univers (primordial). Cette formation a eu lieu lorsque la masse positive a été violemment comprimée entre de multiples amas de masses négatives, créant une haute pression. La forte contraction de la matière et des gaz due à l'effet antigravitationnel des masses négatives a induit un chauffage important, conduisant à un refroidissement rapide facilité par une structure en feuille. Ce temps de refroidissement a permis d'atteindre une température suffisante pour initier des réactions de fusion thermonucléaire, permettant ainsi la naissance des premières étoiles et leur regroupement pour former les galaxies que nous connaissons aujourd'hui.

- Explication des galaxies lointaines à décalage vers le rouge élevé (> 7) apparaissant comme naines (luminosité réduite). En effet, les amas de masses négatives (comme dans la région du Répulseur du dipôle que nous étudierons dans la Section 3.3) créent un effet de lentille gravitationnelle négatif sur leurs photons, ce qui a pour effet d'atténuer leur luminosité.

- Vérifications relativistes locales confirmées, telles que l'avance du périhélie de Mercure ou la déviation des rayons lumineux par le Soleil. En effet, puisque les deux types de masses se repoussent et considérant que la densité de masse négative est presque négligeable à proximité du Soleil, la première équation du système correspond à l'équation de champ d'Einstein (voir la Section 3.3.4).

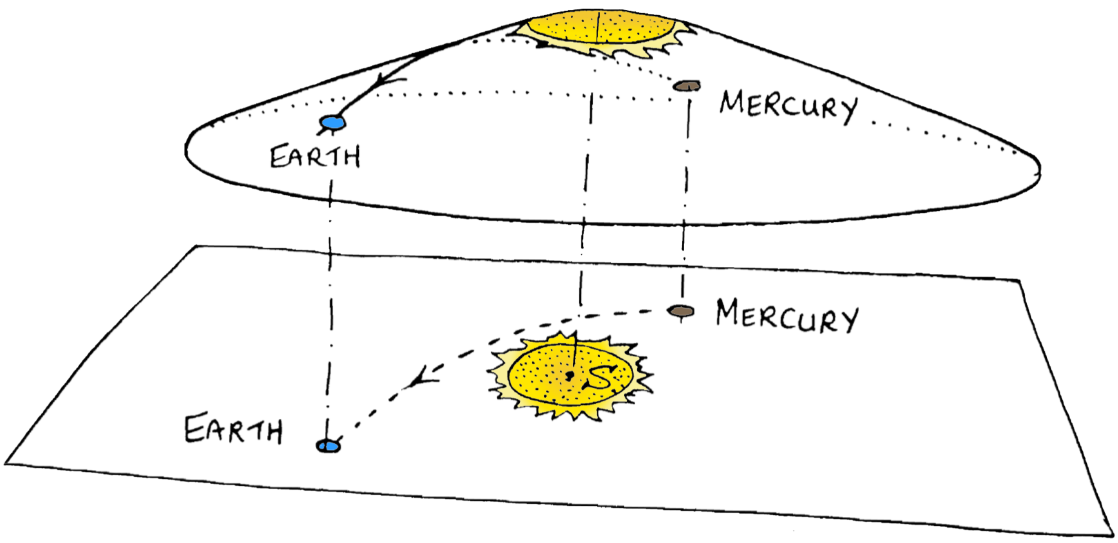


FIGURE 3.5 – Déformation de l'espace-temps induite par la masse du Soleil

- L'exploitation de l'asymétrie entre les deux populations de masses positives et négatives a conduit à la cohérence avec les données d'observations des supernovas de type Ia. L'observation des supernovas de type Ia a été un outil crucial pour déterminer les distances des objets célestes et étudier l'expansion de l'univers. Les supernovas de type Ia sont des explosions de supernova qui se produisent dans des systèmes stellaires binaires où une étoile connue sous le nom de naine blanche absorbe de la matière d'une étoile compagne jusqu'à atteindre une masse critique, provoquant une explosion. Cette asymétrie pourrait être causée par des processus tels que la rotation ou le champ magnétique de l'étoile compagne, qui transfère de la matière à la naine blanche. Si l'asymétrie existe, elle pourrait entraîner une différence de luminosité entre les supernovas de type Ia, ce qui pourrait expliquer les observations.

- Explication de la nature du Répulseur du Dipôle découvert en janvier 2017 (voir la Section 3.3), où il a été montré qu'il existait une région de l'univers apparemment vide, opposée à celle de l'Attracteur de Shapley, qui semblait repousser toute matière.

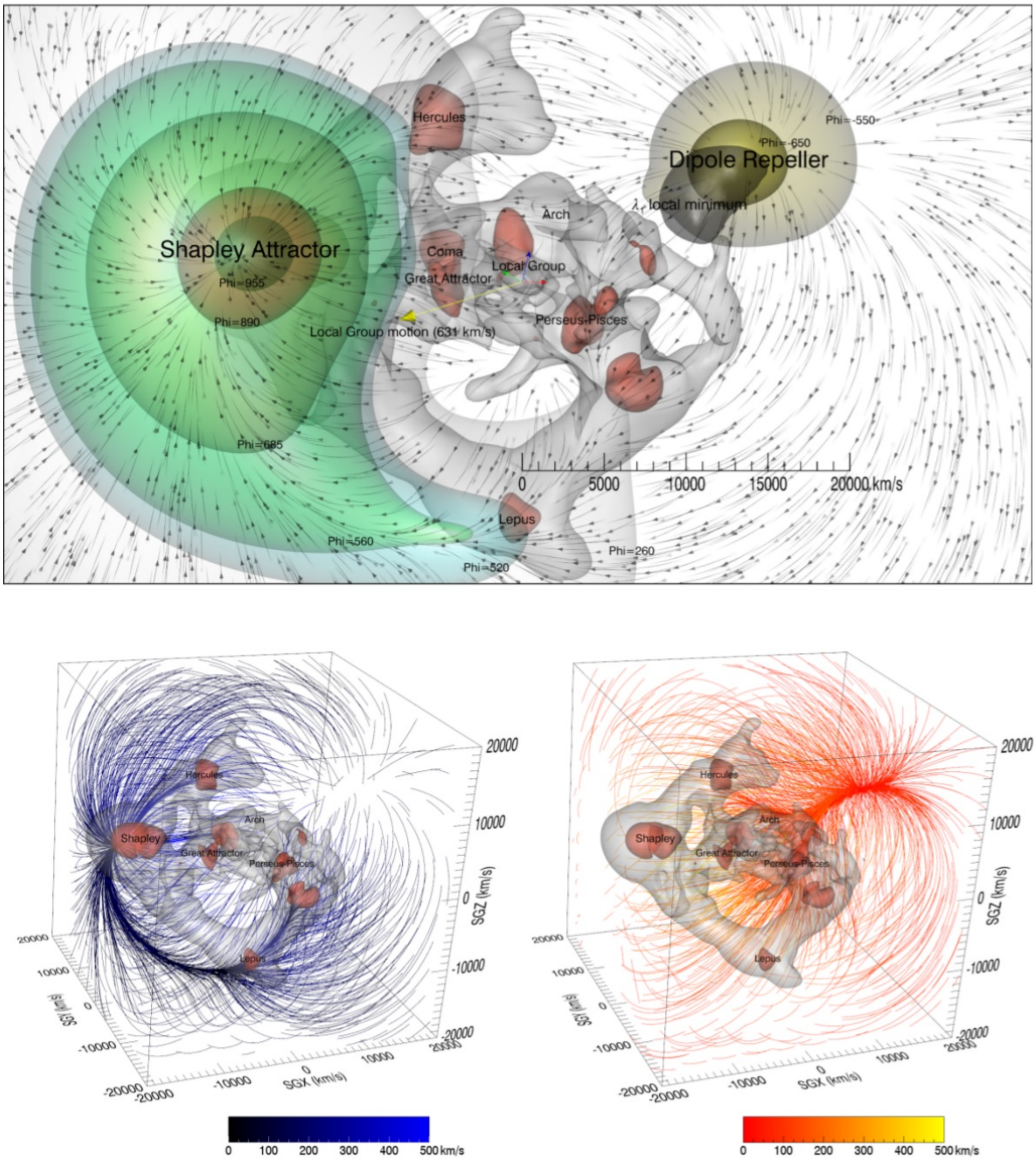


FIGURE 3.6 – Le Répulseur du Dipôle de [35]. L'emplacement du Répulseur du Dipôle (souligné par les cercles rouges) au sein de la structure à grande échelle de l'univers. Le Répulseur du Dipôle est une région hypothétique de l'espace d'où les galaxies sont repoussées, contrebalançant la force attractive du Superamas de Shapley.

— Le modèle met en évidence un modèle de structure spirale galactique durable assuré par la friction dynamique qui transfère continuellement de la quantité de mouvement à l'environnement moins dense de masse négative, permettant aux bras spiralés de tourner de manière persistante et stable autour de la galaxie. Comme illustré ci-dessous, lorsque les bras traversent des régions de haute densité (masses positives), ils ralentissent et perdent de l'énergie, tandis que lorsqu'ils passent à travers des régions de faible densité, ils accélèrent et gagnent de l'énergie. Cela crée des ondes de densité qui se propagent à travers la galaxie, transférant de la quantité de mouvement à l'environnement de masse négative.

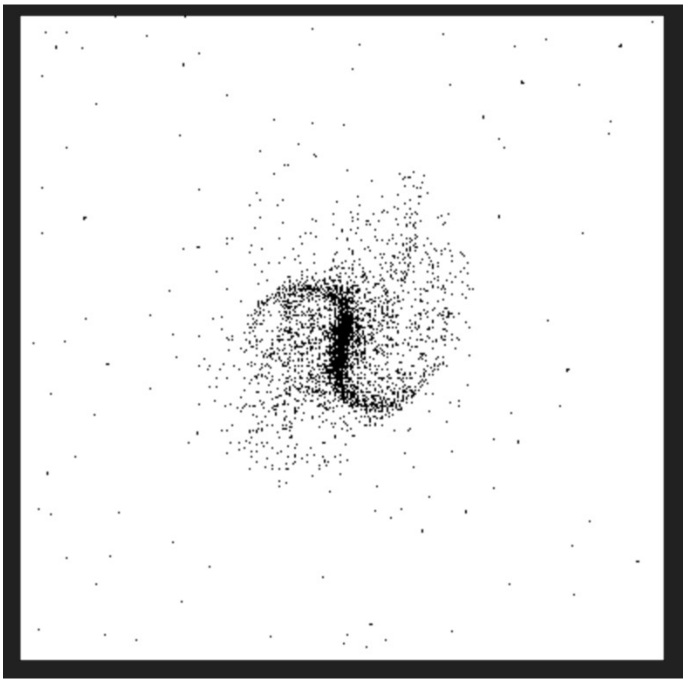


Figure 3.7 – Spirale barrée d'une simulation numérique (1992 : 20 000 points)

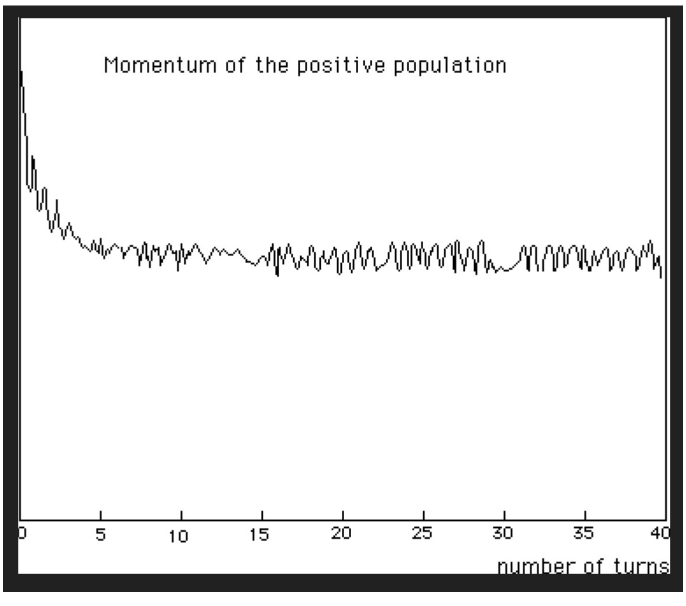


Figure 3.8 – Évolution du moment cinétique (1992 : 20 000 points)

— Explication de l'absence d'observation de l'antimatière cosmique, car elle émet des photons à énergie négative.

— Explication de la nature des composants invisibles de l'univers : antiprotons, antineutrons, antielectrons, antihydrogène et antihélium de masse négative. Ces éléments constituent l'antimatière primordiale, échappant à l'observation car ils émettent des photons à énergie négative.

— **Conjecture confirmée récemment en septembre 2023 [5]** : L'antimatière C-symétrique (symétrie de charge), développée en laboratoire et émettant des photons d'énergie positive, est gravitationnellement poussée vers le bas tout comme la matière ordinaire.

— Le modèle offre sa propre interprétation des fluctuations du Fond Diffus Cosmologique (CMB) en les attribuant à la réponse de la matière ordinaire de masse positive aux fluctuations de densité dans les cellules de l'univers adjacentes peuplées d'une distribution de matière de masse négative. Cette situation est liée à l'instabilité gravitationnelle qui se manifeste au sein de ces cellules. L'analyse de ces fluctuations sert de moyen pour évaluer le rapport entre les facteurs d'échelle des deux types de matière. On observe que le rapport $\frac{a(+)}{a(-)}$ est de l'ordre de 100. Par conséquent, on peut en déduire que le rapport $\frac{c(-)}{c(+)}$ est de l'ordre de 10 ([56]). Cela implique que l'effet global serait de réduire le temps requis pour les voyages interstellaires par un facteur mille pour les objets qui réussissent à inverser leur masse, leur permettant ainsi de se déplacer le long des géodésiques décrites par la métrique $h_{\mu\nu}$ de la deuxième équation de champ 3.3.36, comme nous l'étudierons dans la section suivante.

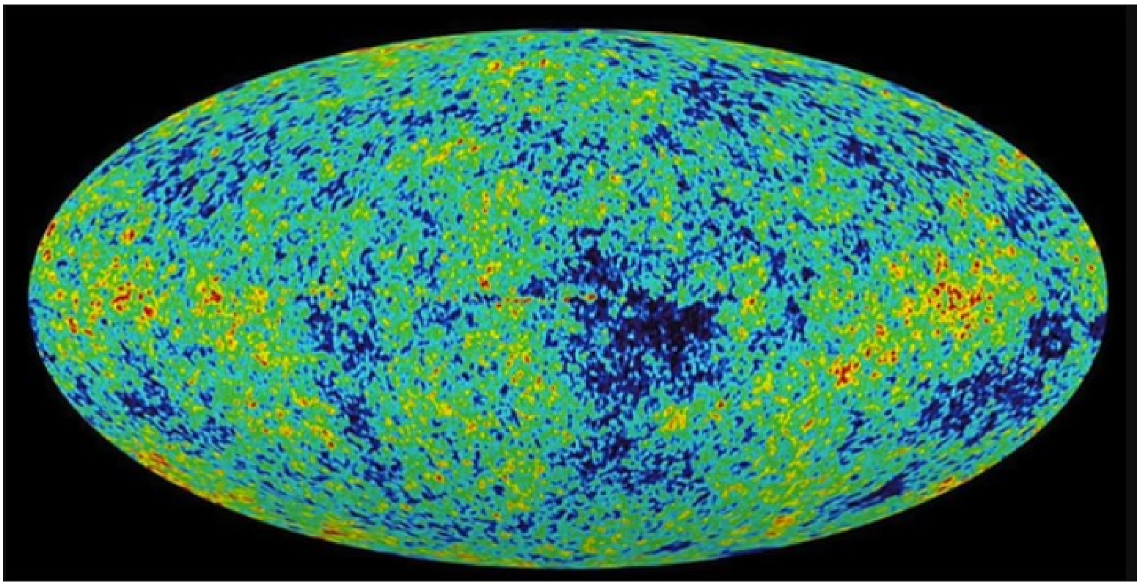


FIGURE 3.9 – Fond Diffus Cosmologique (Souce : Wikipedia)

— Décalage gravitationnel vers le rouge de 3 déduit des deux premières images d'objets supermassifs situés aux centres des galaxies M87 et de la Voie lactée (Voir l'étude menée dans la section 8).

— Il n'y a actuellement pas de réponse à la question : *"Qu'y avait-il avant le Big Bang ?"* Selon le Modèle Cosmologique Janus, une structure topologique de l'univers, *"interagissant avec son homologue antichrone"*, élimine cette question en invalidant le sens de l'adverbe *"avant"*. En effet, comme nous le verrons au chapitre 7, la flèche du temps s'inverse au moment du Big Bang.

3.3 Le Répulseur du Dipôle

3.3.1 Introduction

En 2017, Yehudi Hoffman, B. Tully, H. Courtois et D. Pomarède ont publié la première carte très détaillée de l'univers [35]. Cette carte était basée non seulement sur les positions des galaxies, mais intégrait également leur champ de vitesse en soustrayant l'influence de l'expansion de Hubble aux mesures brutes de leur décalage vers le rouge. Les résultats étaient incroyablement impressionnants et sont considérés comme l'une des découvertes observationnelles les plus importantes en cosmologie aujourd'hui, comparable en importance à la découverte d'Edwin Hubble il y a un siècle. Avant cette étude, on savait que certaines galaxies présentaient des mouvements convergents vers une région appelée le Grand Attracteur. L'analyse de 2017 a révélé l'influence d'une autre structure, plus grande, située au-delà du Grand Attracteur, nommée l'Attracteur de Shapley. Cependant, la découverte la plus remarquable a été l'identification d'une région presque opposée à ces deux formations, où aucune galaxie n'a été détectée. À la place, il y avait un vide significatif entouré de galaxies voisines exhibant un mouvement loin de cette région, formant un motif de *"fuite"* centré sur ce vide. Initialement appelé le Répulseur du Dipôle, il a été ensuite nommé l'Attracteur Dipolaire lorsque l'on a compris qu'il était lié aux formations attractives. Comprendre ce phénomène, qui ne peut pas être attribué à des artefacts de mesure, nécessite sans aucun doute des progrès significatifs dans notre compréhension de la dynamique cosmique.

3.3.2 Quelques Tentatives d'Interprétation

Quatre ans après la découverte initiale, il y a eu peu de tentatives pour modéliser le phénomène du répulseur dipolaire. Dans son article récent [46], Neiser ne se concentre pas sur cette question, mais propose plutôt des hypothèses sur la nature du Big Bang, du vide quantique et de l'origine de l'univers. Neiser spécule que l'antimatière pourrait avoir un effet gravitationnel répulsif, conduisant à la formation d'étoiles neutrinos et d'étoiles antineutrinos qui se repoussent mutuellement. Des aspects similaires de répulsion de l'antimatière primordiale sont mentionnés par Benoit-Lévy et al. en 2012 ([7]), mais sans justification supplémentaire. Heald, dans son article [33], évoque la situation de Laniakea, qui est poussée par le Répulseur du Dipôle et attirée par l'Attracteur de Shapley. Encore une fois, l'idée d'une répulsion entre la matière et l'antimatière est suggérée comme une explication possible de la structure à grande échelle de l'univers et de l'organisation des vides. Cependant, aucun modèle concret n'est donné pour l'objet central dans le grand vide, et l'absence de lumière émise reste inexpliquée. En 2018, Hoffman et al. utilisent des simulations numériques pour reconstruire une distribution de matière noire conforme aux données observationnelles ([34]). Ils suggèrent l'existence d'un biais (ou écart) dans la distribution de matière noire par rapport à la distribution de luminosité des galaxies. Or les observations ont révélé que l'expansion de l'univers s'accélère, ce qui indique la présence d'une composante avec une pression négative ([51], [68], [73]). Un modèle proposé pour expliquer ce phénomène suggère l'existence de masses négatives pouvant contribuer à ces effets antigravitationnels, combinant les influences répulsives de la matière noire et de l'énergie noire sur les composants de masse positive. Cette hypothèse est au centre des travaux correspondant aux références [55] [57] [58] [61] [62] [59] [60].

3.3.3 Interprétation par les Lacunes de la Matière Noire

Étudions la possibilité qu'un vide de matière noire puisse produire l'effet répulsif observé. Nous pouvons commencer par considérer un vide sphérique au sein d'une distribution uniforme de matière noire et utiliser l'équation de Poisson pour analyser ce système :

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r} = 4\pi G\rho_{\mathrm{dm}} \tag{3.3.1}$$

Cette équation est linéaire et décrit le potentiel gravitationnel en fonction de la densité. En superposant deux distributions de densité ρ_1 et ρ_2, le potentiel gravitationnel résultant est la somme des potentiels associés à ces deux distributions : $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$.

En considérant une distribution de densité uniforme $\rho_{\mathrm{dm}}^{\mathrm{unif}}$, nous obtenons un potentiel Ψ_1, qui est la solution de l'équation de Poisson 3.3.1 :

$$\Psi_1 = \frac{4\pi G\rho_{\mathrm{dm}}^{\mathrm{unif}} r^2}{3} \quad \text{et} \quad \vec{g}_1 = -\frac{8\pi G\rho_{\mathrm{dm}}^{\mathrm{unif}}}{3}\vec{r} \tag{3.3.2}$$

Maintenant, en introduisant un volume avec une densité opposée égale à $-\rho_{\mathrm{dm}}^{\mathrm{unif}}$, nous créons un potentiel Ψ_2, qui est la solution de l'équation de Poisson suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi_2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}r} = -4\pi G\rho_{\mathrm{dm}}^{\mathrm{unif}} \tag{3.3.3}$$

Cette solution est :

$$\Psi_2 = -\frac{4\pi G\rho_{\mathrm{dm}}^{\mathrm{unif}} r^2}{3}, \quad \vec{g}_2 = \frac{8\pi G\rho_{\mathrm{dm}}^{\mathrm{unif}}}{3}\vec{r} \tag{3.3.4}$$

Ainsi, nous obtenons le même champ gravitationnel mais avec un signe opposé. Il est donc répulsif et proportionnel à la distance par rapport au centre de la sphère.

Ensuite, en calculant les potentiels gravitationnels associés à ces deux distributions, nous pouvons observer que le potentiel gravitationnel résultant est nul à l'intérieur du vide. En d'autres termes, la force gravitationnelle exercée par la distribution uniforme de matière noire est exactement équilibrée par la force gravitationnelle exercée par la densité opposée créant le vide :

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 \tag{3.3.5}$$

Cependant, quelle que soit la position choisie comme origine des coordonnées, le champ gravitationnel reste non nul à l'intérieur du vide. Cela signifie que la force gravitationnelle n'est pas parfaitement équilibrée, ce qui semble contradictoire avec l'idée d'un vide créant un champ gravitationnel répulsif.

Pour résoudre ce paradoxe, l'équation de Poisson doit être considérée comme la version linéarisée de l'équation d'Einstein dans une situation stationnaire, qui définit le potentiel gravitationnel en termes d'une perturbation de la métrique de Lorentz :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu} \tag{3.3.6}$$

Le calcul classique donne pour la densité propre ρ_0 ([1]) :

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{3} \gamma_{00|i|i} = -\chi\rho_0 \tag{3.3.7}$$

NB : Dans le contexte de la limite de champ faible étudiée dans la Section 2.3.7, l'équation 3.3.7 relie les dérivées secondes spatiales de la composante temporelle γ_{00} du tenseur métrique aux sources gravitationnelles, représentées par la densité locale de masse-énergie ρ_0. Cela nous aide à comprendre comment la courbure de l'espace-temps réagit à la distribution de masse-énergie, tout en maintenant une relation précise entre ces deux aspects.

Ainsi, le potentiel gravitationnel est défini comme 2.3.112 par :

$$\Psi = -\frac{c^2}{2}\varepsilon\gamma_{00} \tag{3.3.8}$$

Ensuite, 3.3.7 peut être identifié à l'équation de Poisson. Cependant, cette approche ne peut pas être appliquée à une distribution uniforme infinie de matière noire. La conclusion est qu'il est tout simplement impossible de définir un potentiel gravitationnel au sein d'une distribution uniforme de matière, car l'instabilité gravitationnelle tend à conduire à la formation de clusters, pas de vides, et il n'existe aucun cadre clair pour la formation de tels vides.

3.3.4 Interprétation par le Modèle Cosmologique Janus

Considérons maintenant l'interaction entre deux entités : la matière ordinaire à masse positive interagissant avec une masse négative à travers des effets gravitationnels. Ce modèle impliquant une masse négative tient compte de l'influence à la fois de la matière noire et de l'énergie noire.

Nous pouvons décrire ce système de deux entités avec des métriques respectives $g_{\mu\nu}$ et $h_{\mu\nu}$. Soient G et H les scalaires de Ricci correspondants. Nous considérons alors l'action à deux couches suivantes [4] :

$$A = \int_{\mathscr{E}} \left(\frac{1}{2\Gamma^{(g)}} G + S_{(g,g)} + S_{(h,g)} \right) \sqrt{|g|}\, \mathrm{d}^4x + \int_{\mathscr{E}} \left(\frac{\kappa}{2\Gamma^{(h)}} H + S_{(h,h)} + S_{(g,h)} \right) \sqrt{|h|}\, \mathrm{d}^4x \tag{3.3.9}$$

4. L'intégration sur $\mathscr{E}$ en utilisant l'élément d^4x est une méthode pour calculer l'action totale dans l'espace-temps bimétrique, reflétant la nature quadri-dimensionnelle de cet univers bimétrique. Cela implique que l'on considère l'ensemble de l'espace-temps comme domaine d'intégration, intégrant les contributions de chaque point à l'action. Le terme d^4x représente un élément infinitésimal d'hypervolume de cet espace-temps bimétrique, servant à *"mesurer"* chaque segment lors de l'intégration. Il s'agit donc d'une intégrale multiple de volume effectuée sur les quatre dimensions de l'espace-temps, cumulant les contributions à l'action totale de chaque segment de volume quadri-dimensionnel, correspondant à chaque métrique.

Les termes $S_{(g,g)}$ et $S_{(h,h)}$ donneront les termes source liés aux populations des deux entités, tandis que les termes $S_{(h,g)}$ et $S_{(g,h)}$ généreront les tenseurs d'interaction. $\Gamma^{(g)}$ et $\Gamma^{(h)}$ sont les constantes gravitationnelles d'Einstein pour chaque entité. g et h sont les déterminants des métriques $g_{\mu\nu}$ et $h_{\mu\nu}$. Pour $\kappa = \pm 1$, nous appliquons le principe de moindre action. La dérivation lagrangienne de cette action nous donne :

$$\begin{aligned}
0 &= \delta A \\
&= \int_{\mathscr{E}} \delta \left(\frac{1}{2\Gamma^{(g)}} G + S_{(g,g)} + S_{(h,g)} \right) \sqrt{|g|}\, \mathrm{d}^4x + \int_{\mathscr{E}} \delta \left(\frac{\kappa}{2\Gamma^{(h)}} H + S_{(h,h)} + S_{(g,h)} \right) \sqrt{|h|}\, \mathrm{d}^4x \\
&= \int_{\mathscr{E}} \delta \left[\frac{1}{2\Gamma^{(g)}} \left(\frac{\delta G}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{G}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta\sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{|g|}\, \mathrm{d}^4x \\
&\quad + \int_{\mathscr{E}} \delta \left[\frac{\kappa}{2\Gamma^{(h)}} \left(\frac{\delta H}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{H}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta\sqrt{|h|}}{\delta h^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} \right] \delta h^{\mu\nu} \sqrt{|h|}\, \mathrm{d}^4x
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Pour toute variation $\delta g^{\mu\nu}$ et $\delta h^{\mu\nu}$, nous obtenons localement :

$$\frac{1}{2\Gamma^{(g)}} \left(\frac{\delta G}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{G}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta\sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \tag{3.3.11}$$

$$\frac{\kappa}{2\Gamma^{(h)}} \left(\frac{\delta H}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{H}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta\sqrt{|h|}}{\delta h^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = 0 \tag{3.3.12}$$

Introduisons alors les tenseurs suivants :

$$T^{(g,g)}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(g,g)}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} S_{(g,g)} \tag{3.3.13}$$

$$T^{(h,h)}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(h,h)}}{\delta h^{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} S_{(h,h)} \tag{3.3.14}$$

$$T^{(h,g)}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{3.3.15}$$

$$T^{(g,h)}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} \tag{3.3.16}$$

En effet, en relativité générale, la dérivée covariante est une manière de généraliser la notion de dérivée partielle aux espaces courbes. Contrairement à une dérivée partielle ordinaire, la dérivée covariante tient compte de la courbure de l'espace-temps.

Ensuite, pour un tenseur $A^{\rho}_{\nu\sigma}$, sa dérivée covariante le long d'un indice μ est donnée par l'expression :

$$\nabla_\mu A^{\rho}_{\nu\sigma} = \partial_\mu A^{\rho}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} A^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A^{\rho}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} A^{\rho}_{\nu\lambda} \tag{3.3.17}$$

Ainsi, nous pouvons déduire les deux expressions suivantes :

$$\nabla_\mu \delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma} = \partial_\mu \delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\delta\Gamma^\rho_{\nu\lambda} \tag{3.3.18}$$

$$\nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma} = \partial_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\delta\Gamma^\rho_{\mu\lambda} \tag{3.3.19}$$

NB :

- 3.3.19 est obtenue à partir de 3.3.18 en échangeant simplement μ et ν.
- Le terme $\partial_\mu A^\rho_{\nu\sigma}$ est la dérivée partielle ordinaire du tenseur. Si l'espace-temps était plat (comme en physique newtonienne), cela suffirait à décrire la variation du tenseur.
- Les termes avec les symboles de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\lambda}$, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ et $\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}$ représentent la correction due à la connexion de l'espace-temps, qui tient compte de sa courbure. En effet, dans l'espace courbe, la connexion (représentée par les symboles de Christoffel Γ) introduit une correction. Cette correction est nécessaire car les bases de l'espace tangent (l'espace dans lequel vit le tenseur) changent d'un point de l'espace-temps à un autre. Ainsi, $\Gamma^\rho_{\mu\lambda}A^\lambda_{\nu\sigma}$ est le terme qui corrige le changement de la composante $A^\lambda_{\nu\sigma}$ lorsque l'on se déplace dans la direction μ pour l'indice supérieur ρ. $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}A^\rho_{\lambda\sigma}$ et $\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}A^\rho_{\nu\lambda}$ sont des termes qui soustraient la contribution due au changement des indices inférieurs ν et σ. Ces termes garantissent que la dérivée covariante respecte les règles de transformation des tenseurs.

  En résumé, la dérivée covariante ∇_μ d'un tenseur est une combinaison de sa dérivée partielle ordinaire et de termes qui compensent les changements de géométrie de l'espace-temps. Elle est construite de manière à ce que la dérivée du tenseur soit elle-même un tenseur, ce qui n'est pas le cas pour la dérivée partielle ordinaire.

Ensuite, le tenseur de Riemann est lié aux symboles de Christoffel par l'équation suivante :

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \tag{3.3.20}$$

NB : Le tenseur de Riemann $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ est une quantité mathématique en relativité générale qui décrit la courbure intrinsèque de l'espace-temps. Il est défini comme la différence entre les dérivées partielles des symboles de Christoffel et la somme des produits des symboles de Christoffel eux-mêmes. Le terme $\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma}$ est la dérivée partielle du symbole de Christoffel $\Gamma^\rho_{\nu\sigma}$ par rapport à la coordonnée x^μ. Ce terme mesure comment le symbole de Christoffel varie en se déplaçant dans la direction μ. Le terme $\partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma}$ est similaire au premier terme, mais avec la dérivée partielle prise dans une direction différente, x^ν. Les termes $\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}$ et $\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}$ décrivent le produit de deux symboles de Christoffel qui représente l'interaction entre deux connexions d'espace-temps. Il mesure comment la courbure dans une direction influence la courbure dans une autre direction.

Ensuite, nous pouvons calculer la variation de ce tenseur :

$$\delta R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \delta\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \tag{3.3.21}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\delta R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \nabla_\mu \delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \tag{3.3.22}$$

En contractant les indices ρ et σ dans la relation précédente en utilisant la convention de sommation d'Einstein, qui stipule qu'un indice répété implique une sommation implicite sur cet indice, nous pouvons exprimer la variation du tenseur de courbure de Ricci qui satisfait l'identité de Palatini ([83], [49]) :

$$\delta R_{\sigma\nu} = \delta R^{\rho}{}_{\sigma\rho\nu} = \nabla_\rho(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma}) \tag{3.3.23}$$

NB : En relativité générale, la géométrie de l'espace-temps est décrite par une quantité appelée le tenseur métrique, noté $g_{\mu\nu}$. Ce tenseur contient toutes les informations sur les distances et les angles dans l'espace-temps.

Le scalaire de Ricci, noté R, est une mesure de la courbure de l'espace-temps en un point donné. Il est calculé en additionnant (ou en contractant) les composantes du tenseur de Ricci $R_{\sigma\nu}$ avec le tenseur métrique $g^{\sigma\nu}$. Mathématiquement, c'est comme si vous multipliez les matrices du tenseur de Ricci et du tenseur métrique, puis ajoutiez les termes le long de la diagonale.

De plus, nous devons avoir la dérivée covariante du tenseur métrique égale à zéro [5]. En d'autres termes, lorsque vous vous déplacez à travers l'espace-temps, la façon dont vous mesurez les distances et les angles ne change pas. C'est une propriété fondamentale de l'espace-temps en relativité générale qui indique que la géométrie locale ne change pas lorsque vous vous déplacez, quelle que soit la courbure globale.

En résumé, le scalaire de Ricci R nous donne une idée de la courbure de l'espace-temps en un point, et le fait que $\nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0$ garantit que la forme de l'espace-temps reste cohérente lorsque nous nous déplaçons, quelle que soit la courbure globale [6].

Nous pouvons donc en déduire :

$$\begin{aligned}
\delta R &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu}\delta R_{\sigma\nu} \\
&= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu}\left(\nabla_\rho(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma})\right) \\
&= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_\rho\left(g^{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\right) - g^{\sigma\nu}\nabla_\nu\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma} \\
&= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_\rho(g^{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - g^{\sigma\rho}\delta\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}) \\
&= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_\rho B^{\rho}
\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

NB : Pour le calcul ci-dessus, nous devons tenir compte de deux règles :

— Les propriétés de la dérivée covariante et la règle de Leibniz (la règle du produit de la dérivation). La règle de Leibniz pour la dérivée covariante est similaire à celle de la dérivée ordinaire et s'écrit comme suit :

$$\nabla_\rho(AB) = (\nabla_\rho A)B + A(\nabla_\rho B)$$

où A et B peuvent être des champs scalaires, vectoriels ou tensoriels.

5. $\nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0$

6. Cette cohérence est assurée par la compatibilité de la métrique avec la connexion de Levi-Civita, qui garantit que des concepts géométriques tels que les longueurs et les angles restent constants lorsqu'ils sont transportés à travers l'espace-temps.

— Comme noté précédemment, les indices répétés sont appelés indices *silencieux* ou *muets* selon la convention de sommation d'Einstein. En effet, il est utile de rappeler que lorsque l'indice d'une variable apparaît deux fois dans un terme, une fois en position supérieure et une fois en position inférieure, cela implique une sommation sur toutes les valeurs possibles que l'indice peut prendre. Par exemple, $A^\mu B_\mu$ implique $\sum_\mu A^\mu B_\mu$. Considérons les symboles de Christoffel $\Gamma^\mu_{\mu\sigma}$ et $\Gamma^\rho_{\rho\sigma}$. Dans ces expressions, les indices μ et ρ sont des exemples d'indices muets selon la convention de sommation d'Einstein. Cela signifie que l'expression $\Gamma^\mu_{\mu\sigma}$, où la somme est effectuée sur toutes les valeurs possibles de μ, est identique à $\Gamma^\rho_{\rho\sigma}$, où la somme est effectuée sur toutes les valeurs possibles de ρ. Ainsi, nous pouvons appliquer les indices de sommation $(\rho, \nu) \to (\mu, \rho)$ dans le dernier terme.

En calculant de deux manières différentes, nous obtenons :

$$\nabla_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu) = \nabla_\mu(\sqrt{|g|})B^\mu + \sqrt{|g|}\nabla_\mu(\delta B^\mu) = \sqrt{|g|}\nabla_\mu\delta B^\mu + 0 = \sqrt{|g|}\nabla_\mu\delta B^\mu \tag{3.3.25}$$

$$\nabla_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu) = \partial_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu) + \Gamma^\mu_{\mu\nu}\sqrt{|g|}\delta B^\nu = \partial_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu) + 0 = \partial_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu) \tag{3.3.26}$$

NB : De manière similaire, la dérivée du déterminant du tenseur métrique, représentée par $\sqrt{|g|}$, est également nulle lorsqu'elle est calculée de manière covariante [7]. Cette dernière propriété simplifie l'expression des intégrales de volume et est fondamentale pour l'application du théorème de la divergence dans l'espace-temps courbe.

Nous pouvons ainsi en déduire que :

$$\sqrt{|g|}\nabla_\mu\delta B^\mu = \partial_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu) \tag{3.3.27}$$

Considérons maintenant la contribution de $\sqrt{|g|}\nabla_\mu\delta B^\mu$ dans l'action. Soit n^μ un vecteur unitaire normal à $\partial\mathscr{E}$, $\varepsilon = n^\mu n_\mu$ et y^a représentant des coordonnées adaptées à la frontière $\partial\mathscr{E}$, et h_{ab} la métrique induite par g_{ab} sur la frontière. Nous avons $|\varepsilon| = 1$, et $\sqrt{|h|}\mathrm{d}^3y$ est une forme volumique de dimension $(n-1)$ sur la frontière, avec $h = \det(h_{ab})$. Par le théorème de Stokes, nous avons :

$$\int_{\mathscr{E}} \sqrt{|g|}\nabla_\mu\delta B^\mu\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x = \int_{\mathscr{E}} \partial_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu)\mathrm{d}^4x \tag{3.3.28}$$

$$= \int_{\delta\mathscr{E}} \varepsilon\delta B^\mu n_\mu\sqrt{|h|}\mathrm{d}^3y \tag{3.3.29}$$

Nous supposerons que la métrique ne varie pas à la frontière (ou qu'il n'y a pas de frontière). Dans ce cas, le terme $\nabla_\mu\delta B^\mu\sqrt{-g}$ ne contribue pas à l'action, donc nous obtenons :

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} + \frac{\nabla_\rho B^\rho}{\delta g^{\mu\nu}} \approx R_{\mu\nu} \tag{3.3.30}$$

Or, d'après le corollaire avec $a = \frac{1}{2}$, nous avons :

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{3.3.31}$$

7. $\nabla_\mu\sqrt{|g|} = 0$

Ainsi, nous pouvons déduire :

$$\frac{R\,\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{3.3.32}$$

NB : Pour les calculs ci-dessus, nous devons expliquer deux choses :

— La variation du déterminant du tenseur métrique, notée δg, est liée à la variation du tenseur métrique lui-même, $\delta g_{\mu\nu}$, à travers la relation $\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$, où g est le déterminant du tenseur métrique et $g^{\mu\nu}$ est son inverse. Cette relation découle de la propriété mathématique des déterminants, où la dérivée d'un déterminant peut être exprimée comme le déterminant multiplié par la trace du produit de l'inverse de la matrice et de la dérivée de la matrice. Dans le cas d'une petite variation, la variation de la racine carrée du déterminant négatif du tenseur métrique, $\delta\sqrt{-g}$, est donnée par $\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$. Cette formule est essentielle pour dériver les équations de champ d'Einstein à partir de l'action d'Einstein-Hilbert, car elle permet l'intégration de l'action sur la variété spatiale-temporelle à quatre dimensions.

— Dans notre étude, nous utilisons le théorème de Stokes pour simplifier un calcul crucial. Ce théorème établit une relation intéressante entre l'intégrale d'une dérivée d'un champ vectoriel sur une région tridimensionnelle et l'intégrale du même champ vectoriel le long de la frontière de cette région.

  Considérons un exemple simple : imaginons une surface fermée dans l'espace (comme la surface d'une sphère). Si nous voulons calculer quelque chose à l'intérieur de cette surface (par exemple, la somme des valeurs d'un champ), le théorème de Stokes nous permet de le faire en examinant simplement ce qui se passe sur la surface elle-même.

  L'équation (3.3.28) que nous avons présentée dans notre calcul suit cette idée. Elle nous dit que l'intégrale de la dérivée d'un champ ($\nabla_\mu \delta B^\mu$) sur une région quadridimensionnelle ($\mathscr{E}$) peut être équivalente à l'intégrale de la divergence d'un autre champ ($\sqrt{|g|}\delta B^\mu$) sur la même région ($\mathscr{E}$). Cette équivalence est réalisée à travers la métrique et un élément de volume quadridimensionnel ($\mathrm{d}^4 x$).

  Ensuite, l'équation (3.3.29) simplifie davantage l'expression en l'amenant à la frontière de la région ($\delta\mathscr{E}$). Elle nous montre que cette équivalence peut être exprimée comme une intégrale le long de la frontière ($\delta\mathscr{E}$), en utilisant des vecteurs normaux (n_μ) à cette frontière et la métrique induite sur celle-ci ($\sqrt{|h|}\mathrm{d}^3 y$). Autrement dit, cette équation nous permet de comprendre ce qui se passe à la surface de notre région sans avoir à calculer ce qui se passe à l'intérieur.

  En résumé, le théorème de Stokes nous permet de rationaliser nos calculs en nous montrant comment les phénomènes à l'intérieur d'une région peuvent être compris en examinant simplement ce qui se passe à la frontière de cette région. Cette astuce mathématique est essentielle pour résoudre ces problèmes complexes.

Nous obtenons alors à partir des équations 3.3.15 et 3.3.16 :

$$\sqrt{\frac{|h|}{|g|}}T^{(h,g)}_{\mu\nu} = \sqrt{\frac{|h|}{|g|}}\frac{-2}{\sqrt{|h|}}\frac{\delta(\sqrt{|g|}S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta(\sqrt{|g|}S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2\frac{\delta S_{(h,g)}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}S_{(h,g)} \tag{3.3.33}$$

$$\sqrt{\frac{|g|}{|h|}}T^{(g,h)}_{\mu\nu} = \sqrt{\frac{|g|}{|h|}}\frac{-2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta(\sqrt{|h|}S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{|h|}}\frac{\delta(\sqrt{|h|}S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = -2\frac{\delta S_{(g,h)}}{\delta h^{\mu\nu}} + h_{\mu\nu}S_{(g,h)} \tag{3.3.34}$$

Introduites dans 3.3.11 et 3.3.12, en tenant compte de 3.3.30, nous pouvons ainsi déduire les équations de champ couplées décrivant le système des deux entités :

$$R^{(g)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = \Gamma^{(g)}\left(T^{(g,g)}_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{|h|}{|g|}}T^{(h,g)}_{\mu\nu}\right) \tag{3.3.35}$$

$$R^{(h)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}H = \kappa\Gamma^{(h)}\left(T^{(h,h)}_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{|g|}{|h|}}T^{(g,h)}_{\mu\nu}\right) \tag{3.3.36}$$

Où $T^{(h,g)}_{\mu\nu}$ et $T^{(g,h)}_{\mu\nu}$ sont les tenseurs d'interaction du système des deux entités correspondant à la *"géométrie induite"*, c'est-à-dire la manière dont chaque distribution de matière sur une couche de l'univers contribue à la géométrie de l'autre[8]. Ce système doit obéir aux conditions de Bianchi, qui s'expriment par la relation suivante :

$$\nabla^{(g)}_{\mu}T^{(h,g)}_{\mu\nu} = \nabla^{(h)}_{\mu}T^{(g,h)}_{\mu\nu} = 0 \tag{3.3.37}$$

Supposons que les fluides au sein des entités g et h soient parfaits, avec des densités d'énergie correspondant aux tenseurs sources suivants :

$$T^{(g,g)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha^{(g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(g)} \end{pmatrix}, T^{(h,h)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha^{(h)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(h)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(h)} \end{pmatrix} \tag{3.3.38}$$

Nous prendrons $\{\alpha^{(g)} > 0, \beta^{(g)} > 0\}$ et $\{\alpha^{(h)} < 0, \beta^{(h)} < 0\}$. Nous veillerons à ce que les lois d'interaction soient telles que deux particules appartenant à la même entité s'attirent, tandis qu'elles se repoussent lorsqu'elles appartiennent à des entités différentes. Introduisons leurs tenseurs d'interaction :

$$T^{(h,g)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha^{(h,g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(h,g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(h,g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(h,g)} \end{pmatrix}, T^{(g,h)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha^{(g,h)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(g,h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(g,h)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(g,h)} \end{pmatrix} \tag{3.3.39}$$

8. Interaction entre populations de masses positives et négatives.

Pour obtenir les lois d'interaction souhaitées sous l'approximation newtonienne, nous devons choisir $\kappa = -1$. Le système d'équations devient alors :

$$R^{(g)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} \left(T^{(g,g)}_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T^{(h,g)}_{\mu\nu} \right) = \Gamma^{(g)} \left(T^{(g,g)}_{\mu\nu} + \Phi T^{(h,g)}_{\mu\nu} \right) \tag{3.3.40}$$

$$R^{(h)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = -\Gamma^{(h)} \left(T^{(h,h)}_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T^{(g,h)}_{\mu\nu} \right) = -\Gamma^{(h)} \left(T^{(h,h)}_{\mu\nu} + \phi T^{(g,h)}_{\mu\nu} \right) \tag{3.3.41}$$

Vérification pour un système non-stationnaire, homogène et isotrope

Si nous supposons que l'univers bimétrique, structuré par les équations de champ couplées 3.3.40 et 3.3.41, est homogène et isotrope, la métrique de Robertson-Walker devient, selon [1] :

$$(\mathrm{d}s^{(f)})^2 = (c^{(f)})^2 \mathrm{d}t^2 - (a^{(f)})^2 \left[\frac{\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)}{(1 + k^{(f)} \frac{r^2}{4})^2} \right] \quad \text{où} \quad f \in \{g, h\} \tag{3.3.42}$$

Notons que $a^{(f)}$ est le facteur d'échelle spatial, $k^{(f)}$, $c^{(f)}$, et $\Gamma^{(f)}$ sont respectivement l'indice de courbure, la vitesse de la lumière, et la constante d'Einstein pour chaque entité.

Si nous introduisons ces métriques dans le système d'équations 3.3.40 et 3.3.41 avec des pressions $p^{(g)} \approx 0$ et $p^{(h)} \approx 0$, nous obtenons le système classique d'équations suivant :

$$\frac{3}{\left(c^{(g)}\right)^2 \left(a^{(g)}\right)^2} \left(\frac{\mathrm{d}a^{(g)}}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \frac{3k^{(g)}}{(c^{(g)})^2 \left(a^{(g)}\right)^2} = -\Gamma^{(g)} \left[\rho^{(g)} \left(c^{(g)}\right)^2 + \Phi \rho^{(h)} \left(c^{(h)}\right)^2 \right] \tag{3.3.43}$$

$$\frac{2}{\left(c^{(g)}\right)^2 \left(a^{(g)}\right)^2} \frac{\mathrm{d}^2 a^{(g)}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\left(c^{(g)}\right)^2 \left(a^{(g)}\right)^2} \left(\frac{\mathrm{d}a^{(g)}}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \frac{k^{(g)}}{\left(c^{(g)}\right)^2 \left(a^{(g)}\right)^2} = 0 \tag{3.3.44}$$

$$\frac{3}{\left(c^{(h)}\right)^2 \left(a^{(h)}\right)^2} \left(\frac{\mathrm{d}a^{(h)}}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \frac{3k^{(h)}}{\left(c^{(h)}\right)^2 \left(a^{(h)}\right)^2} = \Gamma^{(h)} \left[\phi \rho^{(g)} \left(c^{(g)}\right)^2 + \rho^{(h)} \left(c^{(h)}\right)^2 \right] \tag{3.3.45}$$

$$\frac{2}{\left(c^{(h)}\right)^2 \left(a^{(h)}\right)^2} \frac{\mathrm{d}^2 a^{(h)}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\left(c^{(h)}\right)^2 \left(a^{(h)}\right)^2} \left(\frac{\mathrm{d}a^{(h)}}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \frac{k^{(h)}}{\left(c^{(h)}\right)^2 \left(a^{(h)}\right)^2} = 0 \tag{3.3.46}$$

En appliquant les méthodes mathématiques classiques de [1], les conditions de compatibilité des équations 3.3.43, 3.3.44, 3.3.45 et 3.3.46 donnent :

$$3 \frac{\mathrm{d}a^{(g)}}{a^{(g)}} + \frac{\mathrm{d} \left[\rho^{(g)} \left(c^{(g)}\right)^2 + \Phi \rho^{(h)} \left(c^{(h)}\right)^2 \right]}{\left[\rho^{(g)} \left(c^{(g)}\right)^2 + \Phi \rho^{(h)} \left(c^{(h)}\right)^2 \right]} = 0 \tag{3.3.47}$$

$$3 \frac{\mathrm{d}a^{(h)}}{a^{(h)}} + \frac{\mathrm{d} \left[\phi \rho^{(g)} \left(c^{(g)}\right)^2 + \rho^{(h)} \left(c^{(h)}\right)^2 \right]}{\left[\phi \rho^{(g)} \left(c^{(g)}\right)^2 + \rho^{(h)} \left(c^{(h)}\right)^2 \right]} = 0 \tag{3.3.48}$$

Ainsi, l'énergie (et la masse) est conservée pour un univers de poussière :

$$E = \rho^{(g)} \left(c^{(g)}\right)^2 \left(a^{(g)}\right)^3 + \rho^{(h)} \left(c^{(h)}\right)^2 \left(a^{(h)}\right)^3 \tag{3.3.49}$$

Si nous avons :

$$\Phi = \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3, \quad \phi = \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3, \quad \phi = \Phi^{-1} \tag{3.3.50}$$

Les équations de champ couplées deviennent :

$$R^{(g)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} \left[T^{(g,g)}_{\mu\nu} + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3 T^{(h,g)}_{\mu\nu} \right] \tag{3.3.51}$$

$$R^{(h)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = -\Gamma^{(h)} \left[T^{(h,h)}_{\mu\nu} + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3 T^{(g,h)}_{\mu\nu} \right] \tag{3.3.52}$$

Si les deux entités sont dominées par le rayonnement. Le tenseur d'interaction en mode mixte sera :

$$T^{\nu(f)}_{\mu} = \begin{pmatrix} \rho^{(f)}_r c^{(f)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho^{(f)}_r c^{(f)2}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^{(f)}_r c^{(f)2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho^{(f)}_r c^{(f)2}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^{(f)}_r c^{(f)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p^{(f)}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p^{(f)}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p^{(f)}_r \end{pmatrix} \tag{3.3.53}$$

avec

$$\begin{cases} \text{si } \rho^{(f)}_r > 0 \text{ alors } p^{(f)}_r > 0 \text{ pour } f = g \\ \text{si } \rho^{(f)}_r < 0 \text{ alors } p^{(f)}_r < 0 \text{ pour } f = h \end{cases}$$

NB :

— Dans un contexte cosmologique, le tenseur énergie-impulsion $T^{\nu(f)}_{\mu}$ est utilisé pour décrire la distribution et l'interaction de la matière et de l'énergie dans l'univers. Pour un champ spécifique f, la composante temporelle $T^{0(f)}_{0}$ représente la densité d'énergie, qui est un déterminant principal de la courbure de l'espace-temps. Les composantes spatiales $T^{i(f)}_{i}$, d'autre part, représentent la pression exercée dans les directions spatiales, influençant également la structure de l'espace-temps. Dans un modèle bimétrique, où deux champs distincts, c'est-à-dire un pour chaque couche de l'univers, sont considérés, les conditions associées décrivent les relations entre les densités d'énergie et les pressions pour chaque champ, reflétant comment ces entités interagissent et influencent collectivement la dynamique cosmique.

— Le tenseur énergie-impulsion est exprimé sous une forme diagonale lorsqu'on considère l'univers comme isotrope et homogène, signifiant que ses propriétés physiques sont indépendantes de la direction et de la localisation. Cette hypothèse, fondamentale au modèle cosmologique standard, est connue sous le nom de principe cosmologique (Section 2.2.3). L'isotropie implique que l'univers semble identique dans toutes les directions ; il n'y a pas de direction privilégiée où la distribution de matière ou d'énergie différerait. L'homogénéité signifie que, à grande échelle, chaque région de l'univers ressemble à toute autre région. Par conséquent, les flux transverses d'énergie et d'impulsion, qui seraient représentés par des termes non diagonaux dans le tenseur, sont absents puisqu'il n'y a pas de mouvement privilégié ou de flux d'énergie dans une direction spécifique. Seules les densités d'énergie et les pressions dans les directions spatiales, qui sont uniformes et ne varient pas avec la direction, se manifestent dans la matrice du tenseur énergie-impulsion, expliquant sa forme diagonale.

— Il est important de rappeler que la *géométrie gémellaire* du modèle Janus est décrite par deux équations de champs comprenant chacune un tenseur de couplage en mode mixte $T_\mu^{\nu(g,h)}$ et $T_\mu^{\nu(h,g)}$ au second membre, pondéré par la racine carrée du rapport des déterminants des deux métriques [9]. Nous pouvons alors exprimer les expressions 3.3.51 et 3.3.52 sous forme mixte de la manière suivante :

$$R_\mu^{\nu(g)} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu G = \Gamma^{(g)} \left[T_\mu^{\nu(g,g)} + \sqrt{\frac{h}{g}} T_\mu^{\nu(h,g)} \right] \tag{3.3.54}$$

$$R_\mu^{\nu(h)} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu H = -\Gamma^{(h)} \left[T_\mu^{\nu(h,h)} + \sqrt{\frac{g}{h}} T_\mu^{\nu(g,h)} \right] \tag{3.3.55}$$

Les tenseurs d'interaction $T_\mu^{\nu(g,h)}$ et $T_\mu^{\nu(h,g)}$ décrivent l'effet de lentille gravitationnelle négatif induit par les masses d'une couche de l'espace-temps sur celles de l'autre. Mais comme on ignore comment ces populations agissent exactement les unes sur les autres, il est important de souligner qu'on est libre de les définir de telle sorte que les identités de Bianchi soient satisfaites.

Par exemple, comme nous le verrons plus tard dans l'étude du régime stationnaire (Section 3.3.4), dans le cas où les masses positives sont prédominantes, les équations de champ précédentes se réduisent en mode mixte à 3.3.96 et 3.3.97 (Section 3.3.6). Ainsi, nous pouvons définir le tenseur énergie-impulsion $T_\mu^{\nu(g,g)}$ [10] et le tenseur d'interaction $T_\mu^{\nu(g,h)}$ de la manière suivante :

$$T_\mu^{\nu(g,g)} = \begin{pmatrix} \rho^{(g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p^{(g)}}{c^{(g)2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p^{(g)}}{c^{(g)2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p^{(g)}}{c^{(g)2}} \end{pmatrix} \tag{3.3.56}$$

$$T_\mu^{\nu(g,h)} = \begin{pmatrix} \rho^{(g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p^{(g)}}{c^{(g)2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p^{(g)}}{c^{(g)2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p^{(g)}}{c^{(g)2}} \end{pmatrix} \tag{3.3.57}$$

9. En effectuant le calcul élémentaire des déterminants des métriques 3.3.42 pour chaque espèce, en utilisant les mêmes indices de courbure $k^{(g)} = k^{(h)}$ et les mêmes vitesses de la lumière $c^{(g)} = c^{(h)}$, nous pouvons en déduire que les coefficients ϕ et Φ de 3.3.50 peuvent être respectivement identifiés avec le facteur $\sqrt{\frac{g}{h}}$ et son inverse.

10. (13.1) page 425 de [1]

En appliquant l'approximation newtonienne [11] aux équations différentielles de Tolman-Oppenheimer-Volkoff 3.3.180 et 3.3.223 qui en résultent, nous retrouvons l'équation d'Euler $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$ traduisant l'équilibre hydrostatique [12] approximativement égale à $-\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$ pour chaque équation. Nous obtenons ainsi la pression $\frac{p'}{c^2}$ comme étant approximativement égale à $-\frac{\rho m}{r^2}$ pour chaque équation (Sections 3.3.6 & Compatibilité des Équations de Champ dans la Limite des Champs Faibles). Les deux équations satisfont donc asymptotiquement les identités de Bianchi dans la limite newtonienne.

— Du point de vue d'un physicien, l'attention se porte principalement sur les phénomènes observables ou mesurables. Or, dans notre univers *"visible"* constitué de galaxies entraînant un cortège considérable de matière et de gaz, la densité de masse négative est négligeable selon le principe d'interaction du modèle Janus où les masses de signes opposés s'excluent mutuellement (Figure 3.12). Ainsi, la modélisation du comportement de la matière ordinaire (y compris les étoiles à neutron) sous l'effet de la gravitation s'aligne avec les solutions de l'équation de champ d'Einstein, sans nécessiter la prise en compte des tenseurs d'interaction, jugés négligeables. En effet, ils ne deviennent significatifs que dans un espace-temps dominés par les masses négatives tel que le Répulseur du Dipôle. La densité de masse positive étant à son tour négligeable, les équations 3.3.54 et 3.3.55 se réduisent à :

$$R_\mu^{\nu(g)} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu G = \Gamma^{(g)}\sqrt{\frac{h}{g}}T_\mu^{\nu(h,g)} \tag{3.3.58}$$

$$R_\mu^{\nu(h)} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu H = -\Gamma^{(h)}T_\mu^{\nu(h,h)} \tag{3.3.59}$$

Ainsi, un physicien n'étudiera que ce qu'il pourra observer, à savoir la première équation 3.3.58, permettant par exemple de déterminer les géodésiques parcourues par les photons (d'énergie positive) sous l'effet antigravitationnel généré par un conglomérat sphéroïdal de masse négative [13]. Nous vous renvoyons à l'étude de la Compatibilité des Équations de Champ au voisinage du Répulseur du Dipôle.

11. $4\pi r^3 p \ll mc^2$ et $\frac{2Gm}{c^2 r} \ll 1$

12. Où la pression au centre de l'étoile est équilibrée par la force gravitationnelle en fonction de la densité et de la masse

13. Ce phénomène de *lentille gravitationnelle négative* ne peut être produit par une étoile à neutrons de masse négative, puisque ce conglomérat n'est composé que d'antimatière à masse négative, pouvant constituer d'immenses proto-étoiles où la vitesse d'agitation de ces composants est négligeable devant la vitesse de la lumière dans ce milieu (voir la section Nature de l'antimatière primordiale). La forme approchée du tenseur d'interaction peut alors se réduire à l'expression suivante :

$$T_\mu^{\nu(h,g)} \approx \begin{pmatrix} \rho^{(h)}{c^{(h)}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.60}$$

A présent, en introduisant la pression radiative induite par chaque entité :

$$p_r^{(g)} = \frac{\rho_r^{(g)} \left(c^{(g)}\right)^2}{3}, \quad p_r^{(h)} = \frac{\rho_r^{(h)} \left(c^{(h)}\right)^2}{3} \tag{3.3.61}$$

Nous pouvons alors considérer que l'entité portée par la métrique h, appelée énergie noire et matière noire, pourrait être attribuée à des masses négatives qui, en phase radiative, obéiraient à la même équation d'état :

$$\beta^{(h)} = \frac{\alpha^{(h)}}{3} \tag{3.3.62}$$

Dans ces conditions, la relation de conservation est toujours exprimée, sous sa forme radiative, par la conservation de la somme des deux énergies, celle du gaz de photons et celle des masses négatives :

$$\rho_r^{(g)}(c^{(g)})^2(a^{(g)})^4 + \alpha^{(h)}(a^{(h)})^4 = Constante \tag{3.3.63}$$

La solution exacte du système, pour les indices de courbure $k^{(g)} = k^{(h)} = -1$ et $\Gamma^{(f)} = -\frac{8\pi G}{c^4}$ où $f \in \{g, h\}$, devient une solution des équations suivantes :

$$a^{(g)^2} \frac{\mathrm{d}^2 a^{(g)}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\Gamma^{(g)}}{2} E \tag{3.3.64}$$

$$a^{(h)^2} \frac{\mathrm{d}^2 a^{(h)}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\Gamma^{(h)}}{2} E \tag{3.3.65}$$

Si nous supposons que $E < 0$, alors $a^{(g)} > 0$ et $a^{(h)} < 0$. Ainsi, nous pouvons conclure que la partie visible de notre univers accélère, tandis que les espèces négatives décélèrent. Ici, nous observons l'effet des espèces négatives dominantes, qui conduit au phénomène d'accélération de l'expansion cosmique, selon le second membre de la première équation qui devient positif ([60]) :

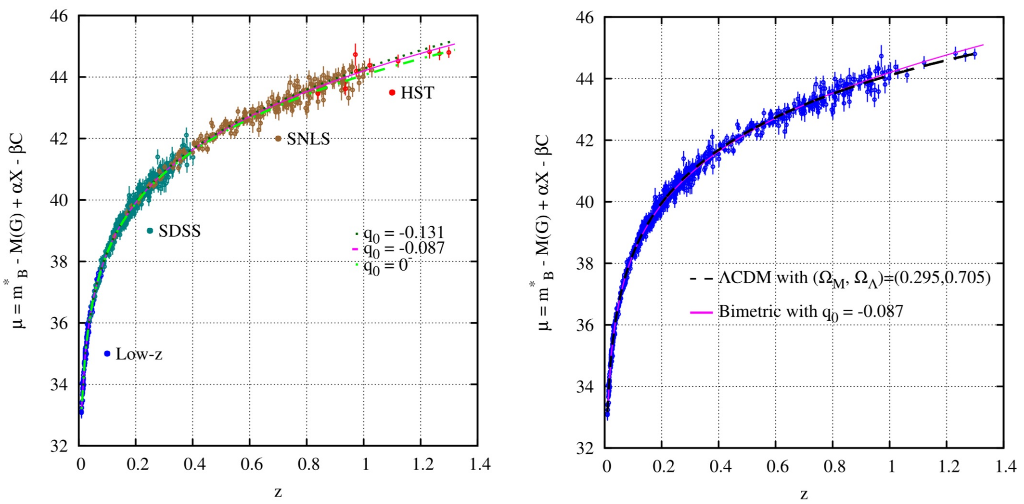


FIGURE 3.10 – Diagramme de Hubble des Deux Modèles (Décalage vers le rouge linéaire)

Ce système à deux espèces permet de consolider les effets attribués à la matière noire et l'énergie noire en une seule entité composée de masses négatives qui combine les deux actions, comme illustré par le diagramme suivant :

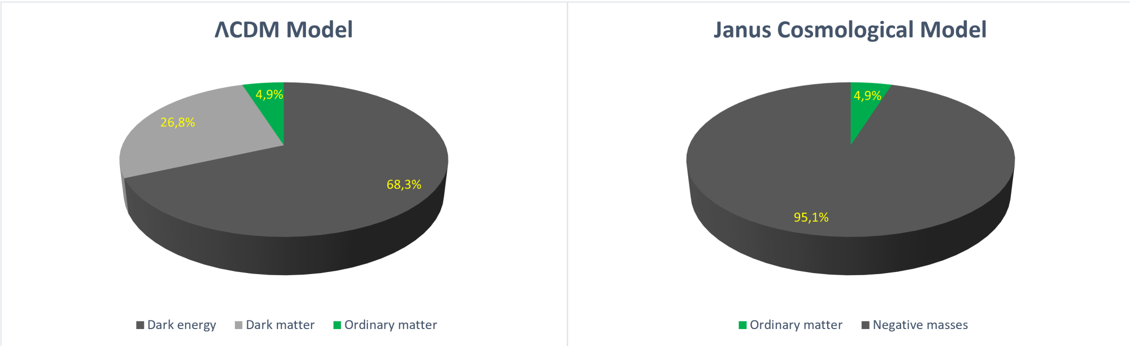


FIGURE 3.11 – Modèles Cosmologiques

Vérification locale d'un système stationnaire

Dans l'étude de l'univers, nous simplifions souvent les modèles pour les rendre plus gérables. Une simplification courante consiste à considérer une petite région de l'espace comme étant effectivement vide et isolée des vastes complexités du cosmos. Cette approche est particulièrement utile lorsque nous nous intéressons à des phénomènes se produisant sur de courtes périodes, bien plus courtes que les échelles de temps sur lesquelles l'univers lui-même change. Dans de tels cas, nous pouvons utiliser des métriques *"indépendantes du temps"*, ce qui signifie que nous supposons que la structure de l'espace ne change pas avec le temps pendant notre observation.

Pour ajouter un peu de complexité, nous introduisons parfois ce que l'on appelle des *"perturbations"* au modèle. Ces perturbations sont de petites modifications de l'espace, par ailleurs simple, que nous considérons. Elles nous permettent d'étudier comment de légers changements ou perturbations pourraient affecter le système. Dans notre cas, ces perturbations sont représentées par des termes tels que $\gamma_{\mu\nu}^{(g)}$ et $\gamma_{\mu\nu}^{(h)}$, qui signifient de petites déviations dans la structure géométrique de l'espace, représentant potentiellement différents aspects ou composants de l'univers.

$$g_{\mu\nu}^{(g)} = \eta_{\mu\nu}^{(g)} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}^{(g)}, \quad g_{\mu\nu}^{(h)} = \eta_{\mu\nu}^{(h)} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}^{(h)} \tag{3.3.66}$$

Pour les métriques, nous avons :

$$(\mathrm{d}s^{(g)})^2 = (c^{(g)})^2\mathrm{d}t^2 - (a^{(g)})^2[(\mathrm{d}\xi^1)^2 + (\mathrm{d}\xi^2)^2 + (\mathrm{d}\xi^3)^2] \tag{3.3.67}$$

$$(\mathrm{d}s^{(h)})^2 = (c^{(h)})^2\mathrm{d}t^2 - (a^{(h)})^2[(\mathrm{d}\xi^1)^2 + (\mathrm{d}\xi^2)^2 + (\mathrm{d}\xi^3)^2] \tag{3.3.68}$$

En cosmologie, lorsque nous parlons de *"conditions quasi stationnaires"*, nous faisons référence à une situation où certains aspects de l'univers sont supposés être relativement constants sur la période que nous étudions. Plus précisément, dans ce contexte, les *"facteurs d'échelle spatial"* de l'univers, qui décrivent comment la taille de l'univers change au fil du temps, sont considérés comme constants. C'est une approximation utile pour étudier certains phénomènes à court terme.

Pour approfondir la physique d'un tel scénario, nous utilisons ce que l'on appelle une *"développement en série"* des équations de champ. Il s'agit d'une technique mathématique où nous décomposons des équations complexes en parties plus simples et plus gérables. Cependant, nous nous concentrons uniquement sur les parties les plus significatives - dans ce cas, nous ignorons les termes d'ordre deux et supérieur, car ils ont un impact minimal sur les résultats pour des scénarios à petite échelle ou à court terme.

Les équations simplifiées résultantes, étiquetées comme 3.3.69 et 3.3.70, décrivent le comportement des perturbations dans cet univers quasi stationnaire. Ces équations impliquent des termes comme $\epsilon\gamma_{00}$ et $\delta\rho$, qui représentent de petits changements dans la géométrie de l'espace et la densité de la matière, respectivement.

$$\varepsilon\gamma^{(g)}_{00|\beta|\beta} = -\Gamma^{(g)} \left[\delta\rho^{(g)} \left(c^{(g)}\right)^2 + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3 \delta\rho^{(h)} \left(c^{(h)}\right)^2\right] \tag{3.3.69}$$

$$\varepsilon\gamma^{(h)}_{00|\beta|\beta} = \Gamma^{(h)} \left[\delta\rho^{(h)} \left(c^{(h)}\right)^2 + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3 \delta\rho^{(g)} \left(c^{(g)}\right)^2\right] \tag{3.3.70}$$

De plus, nous définissons les *"potentiels gravitationnels"* pour chaque composante de l'univers, notés $\Psi^{(g)}$ et $\Psi^{(h)}$. Ces potentiels sont liés aux changements dans la géométrie de l'espace et sont la clé pour comprendre les effets gravitationnels dans différentes régions ou composantes de l'univers (comme 2.3.114).

$$\Psi^{(g)} = \frac{\left(c^{(g)}\right)^2}{2}\varepsilon\gamma^{(g)}_{00}, \quad \Psi^{(h)} = \frac{\left(c^{(h)}\right)^2}{2}\varepsilon\gamma^{(h)}_{00} \tag{3.3.71}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2\Psi^{(g)}}{\partial\xi^\alpha\partial\xi_\alpha} = -\Gamma^{(g)}\frac{\left(a^{(g)}\right)^2}{2} \left[\delta\rho^{(g)} \left(c^{(g)}\right)^2 + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3 \delta\rho^{(h)} \left(c^{(h)}\right)^2\right] \tag{3.3.72}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2\Psi^{(h)}}{\partial\xi^\alpha\partial\xi_\alpha} = \Gamma^{(h)}\frac{\left(a^{(h)}\right)^2}{2} \left[\delta\rho^{(h)} \left(c^{(h)}\right)^2 + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3 \delta\rho^{(g)} \left(c^{(g)}\right)^2\right] \tag{3.3.73}$$

En physique, particulièrement dans l'étude de l'espace et de l'univers, comme nous l'avons vu dans cette section 2.3.9, les *"équations géodésiques"* décrivent comment les objets se déplacent sous l'influence de la gravité. En termes simples, ces équations nous indiquent la trajectoire qu'un objet empruntera lorsqu'il se déplace uniquement sous l'effet de la gravité. Par exemple, comment les planètes orbitent autour des étoiles ou comment les objets tombent sur Terre.

Dans notre scénario, nous traitons avec deux couches (ou feuillets) différentes de l'univers, chacune ayant ses propres propriétés. La première couche, que nous pouvons considérer comme l'univers de la matière ordinaire, suit un ensemble de règles.

La seconde couche de masses négatives, associée à la matière noire et à l'énergie noire, suit un autre ensemble de règles.

Les prochaines équations 3.3.74 et 3.3.75 sont la manière d'exprimer mathématiquement comment les objets se déplaceraient dans ces deux couches différentes (La couche de la matière ordinaire et celle des masses négatives respectivement). Ces équations ressemblent à l'équation de Poisson classique en physique, qui est utilisée pour décrire les champs gravitationnels. Cependant, les équations ont une particularité - elles tiennent compte de différentes *"vitesses de la lumière"* dans chaque couche. Cette modification est cruciale pour explorer des théories qui vont au-delà de notre compréhension standard de la physique.

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{\left(a^{(g)}\right)^2}\frac{\partial\Psi^{(g)}}{\partial\xi_\alpha} \tag{3.3.74}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{\left(a^{(h)}\right)^2}\frac{\partial\Psi^{(h)}}{\partial\xi_\alpha} \tag{3.3.75}$$

Les lois d'interaction que nous avons choisies garantissent que les entités issues des couches structurées par les métriques g et h s'excluent mutuellement (Figure 3.12).

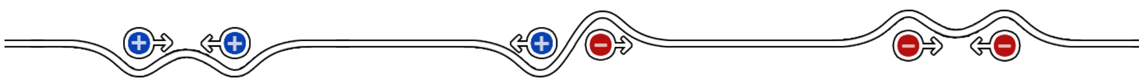


FIGURE 3.12 – Lois d'interaction entre les masses

Par conséquent, nous pouvons considérer une région où seulement l'une des deux entités est présente. En se concentrant sur le référentiel structuré par la métrique g, qui est peuplé de matière ordinaire comme dans le système solaire, le système d'équations de champ couplées se simplifie de la manière suivante :

$$R^{(g)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = \Gamma^{(g)}T^{(g,g)}_{\mu\nu} \tag{3.3.76}$$

$$R^{(h)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}H = -\Gamma^{(h)}\sqrt{\frac{|g|}{|h|}}T^{(g,h)}_{\mu\nu} \tag{3.3.77}$$

La première équation 3.3.76 peut être identifiée comme étant l'équation d'Einstein sans la constante cosmologique Λ. Cette équation représente le Modèle Standard de la matière ordinaire sous l'influence de la gravitation. La deuxième équation 3.3.77 capture ce que l'on pourrait appeler *"l'effet de géométrie induite"*. Elle décrit comment la géométrie de l'espace, influencée par la présence de la matière ordinaire dans une sphère de rayon r et de densité $\rho^{(g)} = \rho$, affecte les géodésiques de la couche des masses négatives. Par conséquent, nous pouvons déduire que ce modèle bimétrique, dans lequel la matière ordinaire dans une couche interagit avec des masses négatives situées dans une seconde, s'aligne avec les tests standards de la relativité générale au niveau local. Néanmoins, il reste crucial de vérifier la cohérence de ce système sous des conditions stationnaires et non homogènes.

Nature de l'antimatière primordiale

Suivant les propositions de Sakharov dans [69], [70] et [72], supposons que la paire matière/antimatière dans la première couche de notre univers soit composée de quarks et d'antiquarks à énergie positive. En même temps, une paire matière/antimatière dans une seconde couche serait formée de quarks et d'antiquarks à énergie négative. Si la synthèse de la matière dans la première couche (la première paire) était plus rapide, tandis que la synthèse de l'antimatière dans la seconde couche (la seconde paire) était plus lente, cela pourrait conduire à l'hypothèse que les objets situés au centre des grands vides dans la structure à grande échelle de l'univers, comme indiqué par le phénomène du répulseur dipolaire, sont composés d'antimatière. Cette antimatière comprend des antiprotons, des antineutrons et des antielectrons à énergie négative [14]. Ces derniers pourraient former des objets sphéroïdaux composés d'antihydrogène (éléments légers) aux propriétés répulsives similaires à d'immenses proto-étoiles formées pendant la phase radiative primordiale (au début de l'univers).

Le réseau lacunaire de masse positive confine cet espace de densité négative, empêchant leur fusion. Inversement, ces conglomérats de masse négative agissent comme des points d'ancrage pour ce réseau poreux dans l'univers des masses positives, assurant une stabilité globale.

En effet, les étoiles à masse positive se forment généralement à partir d'amas sphéroïdaux de gaz, chauffés à des températures élevées. Ces proto-étoiles se refroidissent progressivement, émettant principalement un rayonnement dans les spectres rouge et infrarouge. Pour se transformer en véritables étoiles, la matière et les gaz doivent subir une contraction gravitationnelle, atteignant des températures et des densités suffisamment élevées pour initier des réactions de fusion thermonucléaire. Ce processus de contraction libère de l'énergie thermique, qui est rayonnée à la surface de l'étoile sous forme électromagnétique, y compris de la lumière visible. Cette libération d'énergie est proportionnelle au carré du rayon de l'étoile. Les étoiles plus grandes ont des surfaces plus étendues et peuvent dissiper plus de chaleur. Cependant, la quantité de chaleur produite est proportionnelle au cube du rayon de l'étoile, liée à son volume. Ainsi, pour les étoiles très massives, le taux de refroidissement peut être relativement lent, et il peut s'écouler un temps considérable avant que la température n'atteigne le seuil nécessaire pour déclencher les réactions de fusion thermonucléaire qui permettent à l'étoile de briller.

Dans notre monde composé de matière ordinaire, on considère que les réactions de fusion nucléaire peuvent commencer au cœur d'une proto-étoile lorsque la température atteint une température optimale d'environ 10 millions de degrés Celsius. C'est à cette température que les noyaux d'hydrogène, qui constituent la majo-

14. C'est-à-dire des masses négatives ([78]).

rité de la matière dans la proto-étoile, acquièrent suffisamment d'énergie cinétique pour surmonter la barrière électrostatique due à leur charge positive. Lorsque cette barrière est franchie, les noyaux d'hydrogène peuvent fusionner pour former de l'hélium, libérant ainsi une quantité considérable d'énergie rayonnante et thermique. Cette température optimale permet une réaction de fusion nucléaire plus efficace, produisant l'éclat caractéristique des étoiles.

Ainsi, une proto-étoile à masse négative très massive et très chaude peut prendre beaucoup de temps à se refroidir suffisamment pour que les réactions de fusion commencent, car le processus de contraction de la proto-étoile doit générer suffisamment de chaleur pour compenser la perte de chaleur à la surface.

En conséquence, ces proto-étoiles à masse négative très massives ont des temps de refroidissement si longs qu'elles ne s'allumeront jamais (dépassant l'âge de l'univers). De ce fait, aucune galaxie, aucun élément lourd, aucune molécule ou toute autre forme de matière nécessaire au développement de la vie dans le monde négatif ne peut se former.

Simulations numériques 2D

Des simulations numériques bidimensionnelles ont été réalisées en utilisant deux ensembles de 5000 points de masse, représentant des amas de matière ordinaire (densité de population $\rho^{(g)}$) et des masses négatives (densité de population $\rho^{(h)}$).

Une asymétrie significative a été maintenue entre les deux populations, avec $|\rho^{(h)}|$ étant beaucoup plus grand que $\rho^{(g)}$. De plus, des distributions Maxwelliennes de vitesses thermiques 2D ont été appliquées aux deux ensembles, la vitesse moyenne de la distribution de masse négative étant quatre fois plus élevée que celle de la matière ordinaire.

Ces simulations ont révélé une structure lacunaire de masses négatives aux centres des grands vides dans la structure à grande échelle de l'univers. Comme les temps de Jeans varient inversement avec la racine carrée de la densité, le temps de développement pour la distribution de masse négative est plus court. Cela entraîne la formation d'un réseau régulier de conglomérats sphéroïdaux. La distribution de matière ordinaire, par conséquent, est forcée d'occuper l'espace restant, conduisant à une structure lacunaire similaire à un ensemble de bulles de savon jointives dans des simulations tridimensionnelles. Ce modèle a également été observé par Brennen en 1995 [13] (Figures 3.13 et 3.14), tel que cité par El-Ad en 1997 ([26]).

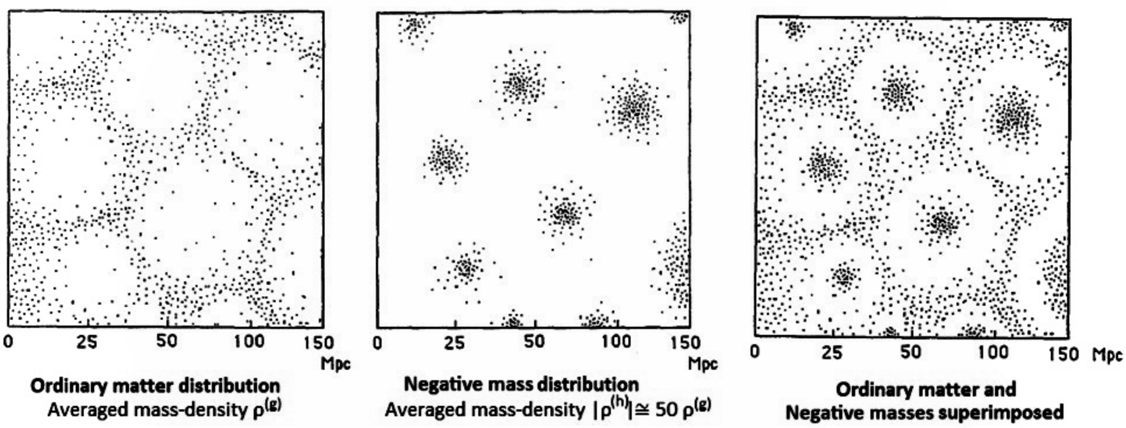


FIGURE 3.13 – Répartition de la Matière Ordinaire et des Masses Négatives lorsque $|\rho^{(h)}| \gg \rho^{(g)}$

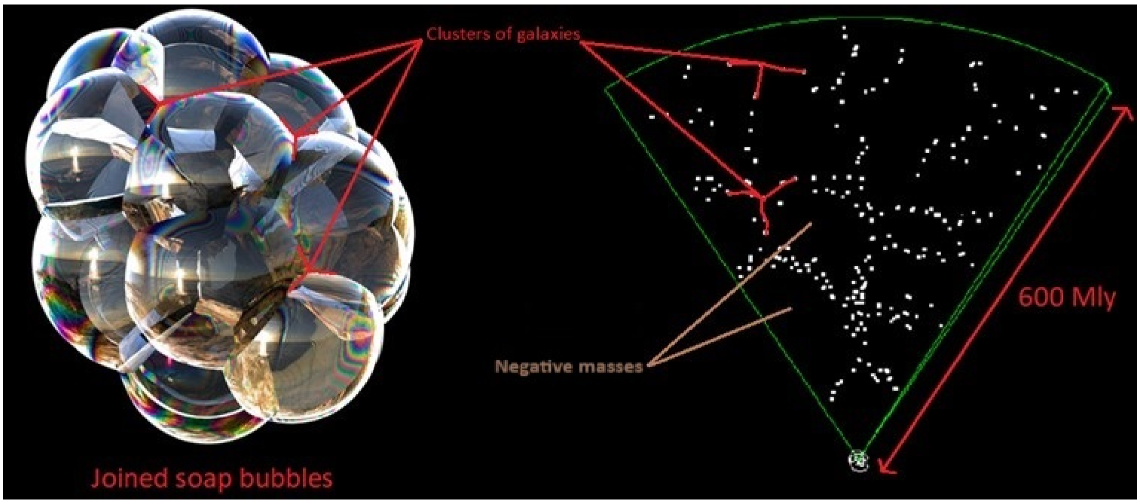


FIGURE 3.14 – Structure Lacunaire Sphéroïdale

Il est important de considérer que dans l'étude des masses négatives, nous manquons de données observationnelles à comparer avec les prédictions numériques potentielles, sauf pour les effets de géométrie induits par ce référentiel (celui des masses négatives) à travers les phénomènes de lentille gravitationnelle structurant la métrique $g_{\mu\nu}$.

Par conséquent, la pression dérivée de l'équation différentielle TOV (Tolman - Oppenheimer - Volkoff) 3.3.223 dans l'espace-temps structuré par la métrique $h_{\mu\nu}$ restera toujours hypothétique. En conséquence, il n'est pas pratique d'essayer de structurer le tenseur d'interaction $T_{\mu}^{\nu(g,h)}$ de la seconde équation de champ 3.3.97 (Section 3.3.6). En effet, nous ne pourrons jamais comparer les résultats obtenus en calculant les géodésiques de $h_{\mu\nu}$ avec des données observationnelles liées au mouvement de particules à masse négative. Au lieu de cela, nous devons travailler avec une fonction $\beta(r)$ (non liée à la pression négative) uniquement pour garantir l'existence d'une solution dans ce référentiel (3.3.102). L'aspect le plus important est de définir les tenseurs en mode mixte 3.3.56 et 3.3.57 de chaque équation de champ de telle sorte que la pression $\frac{p'}{c^2}$ traduisant l'équilibre hydrostatique soit la même pour chaque équation et satisfait donc asymptotiquement les identités de Bianchi dans la limite newtonienne.

Pour pleinement comprendre cet effet de géométrie induite, il faut se placer dans le contexte du système à deux équations de champ couplées du modèle. En effet, il est important de rappeler que cela structure une hypersurface 4D selon 2 métriques associées à 2 couches d'espace-temps distinctes. Chaque type de masse est associé à sa propre métrique, ce qui implique qu'une masse crée toujours une courbure positive dans l'espace-temps selon sa propre métrique (où la masse émet des photons d'énergie visible) et toujours une courbure négative dans la métrique conjuguée (où la masse émet des photons d'énergie invisible), comme on peut le voir sur la figure suivante 3.15.

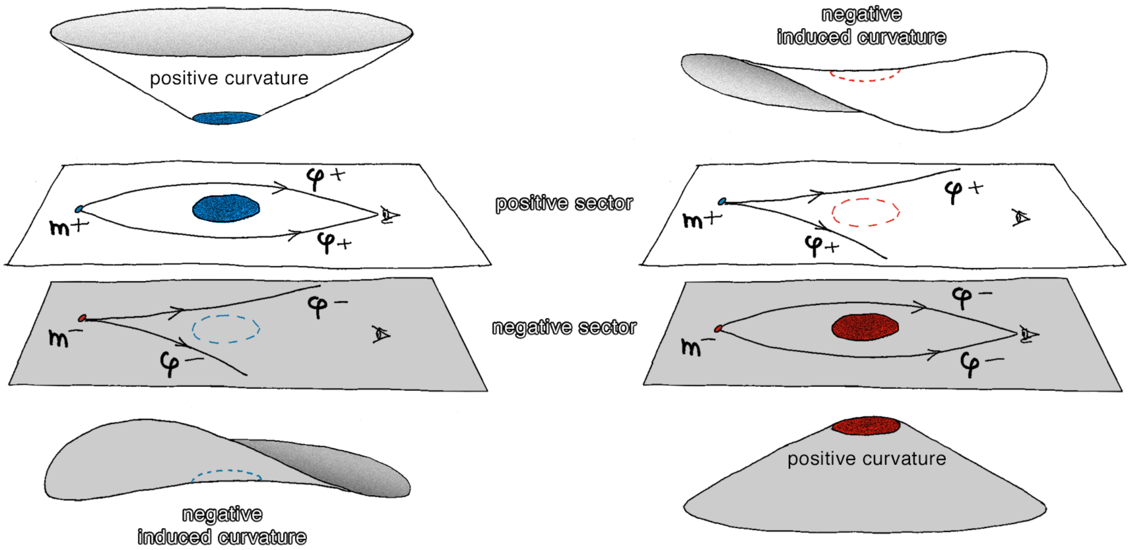


FIGURE 3.15 – Effet de géométrie induite où les photons peuvent être représentés par le symbole φ ou γ

À gauche de la figure 3.15, l'objet massif bleu appartenant à l'univers positif crée une courbure positive. Par conséquent, il produit un effet de lentille gravitationnelle positif sur l'image d'une petite masse positive m^+, provoquant la convergence des photons d'énergie positive φ^+ autour de l'objet massif bleu. Cependant, cet objet massif induit une courbure négative dans l'univers négatif. Par conséquent, même s'il est invisible, sa masse apparente dans l'univers négatif est ressentie comme étant négative.

Inversement, à droite de la figure 3.15, l'objet massif rouge appartient à l'univers négatif. Il crée une courbure positive par rapport à son propre référentiel (et non une courbure négative). Cet objet massif induit une courbure négative qui est perçue dans notre univers, même si ses photons d'énergie sont invisibles. Par conséquent, nous concluons que sa masse apparente est négative. En effet, il produit un effet de lentille gravitationnelle négatif sur l'image d'une petite masse m^+, provoquant la divergence des photons d'énergie positive φ^+ autour de l'objet massif négatif invisible, dont l'effet gravitationnel est toujours présent.

Nous pouvons déduire plusieurs corollaires du concept de masse négative :

— Fondamentalement, il n'y a pas de masse négative (et donc pas d'énergie négative). Du moins, la *"négativité de la masse"* (et la *"négativité de l'énergie"*, car les deux sont évidemment liées) n'est pas une propriété physique intrinsèque d'une *"particule de masse négative"*. En effet, la *"négativité"* ou la *"positivité"* de la masse n'est qu'une quantité de courbure mesurée localement dans l'espace-temps par un observateur. Le signe de cette courbure est relatif au référentiel de l'hypersurface ou de la métrique dans laquelle cette masse est mesurée. Il s'agit, en fait, d'une masse apparente dont la présence n'est révélée que par la courbure qu'elle induit dans l'espace-temps.

En d'autres termes, toutes les particules ayant une masse dans l'univers possèdent exclusivement une masse inertielle positive, mais leur masse gravitationnelle est relative. Le signe de leur masse gravitationnelle est opposé (positif ou négatif) en fonction de la perspective adoptée : une masse déforme l'espace-temps dans sa propre métrique, induisant une certaine quantité de courbure toujours positive. Cependant, elle sera perçue comme une masse apparente dans l'univers opposé, à partir duquel un observateur percevra cette courbure comme négative. Cela est dû à la nature couplée des équations de champ et cela entraîne un effet de *courbure conjuguée*. On pourrait également le décrire comme *"la même masse induisant deux courbures opposées"*.

Par exemple, la Terre, vue depuis notre référentiel, possède une masse positive. Par un processus inconnu, imaginez que vous puissiez inverser son énergie (et sa masse). La Terre (et toutes les étoiles dans le ciel) disparaîtrait car vous ne pourriez plus percevoir les photons d'énergie positive émis. Cependant, vous pouvez toujours percevoir et mesurer la courbure qu'elle continue d'induire dans notre espace-temps. En effectuant cette mesure, vous détecteriez que la Terre désormais invisible possède une masse négative.

Cependant, il n'existe pas d'univers distincts d'énergies positives et d'énergies négatives. Il s'agit simplement d'un choix arbitraire de nomenclature. Les deux sont équivalents. Par convention, nous appelons le secteur de l'univers où nous vivons, celui composé de matière à masse positive.

- L'inversion de la flèche du temps ne signifie pas que nous commençons à parcourir le temps *"à rebours"* et que nous rajeunissons. Elle se manifeste physiquement par l'inversion de l'énergie des particules. Encore une fois, cette inversion est une observation relative. En pratique, elle se traduit par un passage au secteur opposé de l'univers.
- Il est important de noter que les particules d'énergie négative (et leurs photons) ne peuvent pas être détectées par des instruments optiques car elles suivent des géodésiques de leur propre métrique $h_{\mu\nu}$, distinctes des géodésiques de notre métrique $g_{\mu\nu}$. Il existe donc deux ensembles de géodésiques qui ne se *"croisent"* jamais. Étant donné que les espèces d'énergie positive et d'énergie négative ne peuvent pas se voir et évoluent le long de deux familles distinctes de géodésiques, les deux référentiels d'espace-temps dans lesquels elles résident sont respectivement appelés le référentiel de masse positive et le référentiel de masse négative. Ainsi, ce sont deux référentiels au sein de la même hypersurface 4D, structurée par deux équations de champ couplées, et non pas une seule. Cependant, même si les masses négatives nous sont invisibles car elles n'interagissent pas électromagnétiquement avec notre secteur sans échanger de photons, elles ne révèlent leur présence que par un effet antigravitationnel, car elles induisent des courbures opposées dans notre secteur observable.
- Les masses négatives sont répandues dans l'univers, mais leurs proportions varient en fonction de la région de l'espace dans laquelle nous nous trouvons. Elles n'existent que pour contribuer à sa stabilité par le biais d'un effet

antigravitationnel.

— L'univers peut être défini par une hypersurface structuré par deux métriques qui permettent de mesurer les distances entre des points de deux manières différentes, en utilisant deux ensembles distincts de repères (trois repères spatiaux et un repère temporel). D'une manière didactique, on peut envisager cet univers comme une feuille de papier avec deux grilles de mesure différentes sur chacune de ses deux faces.

3.3.5 Perspective d'Avenir

Approche Expérimental de l'Inversion de Masse

L'approche scientifique pour comprendre un phénomène peut se résumer par la capacité à le reproduire et à le mesurer. Il est important de noter qu'il est tout à fait possible de démontrer le phénomène de l'inversion de masse en laboratoire en inversant une quantité infinitésimale de matière, à condition de pouvoir induire une perturbation significative de cette matière en produisant des paramètres électromagnétiques de l'ordre de plusieurs dizaines de millions de teslas pendant une très courte période, en utilisant par exemple des explosifs. L'Union soviétique avait déjà atteint une production de 100 millions d'ampères en comprimant un flux magnétique à l'aide d'explosifs dans les années 1950, en utilisant un générateur magnéto-cumulatif ([50]). Il serait alors possible de démontrer cette inversion de masse en mesurant les ondes gravitationnelles émises et détectées par les interféromètres laser Virgo et Ligo.

Protocole Expérimental pour l'Étude de l'Inversion de Masse via des États Métastables Nucléaires

Cette approche propose d'explorer le phénomène d'inversion de masse en laboratoire en exploitant les états métastables de noyaux atomiques spécifiques, tels que ceux du platine, de l'iridium, du cobalt et du xénon. L'objectif est de stocker de l'énergie dans ces états métastables avant de la libérer pour induire une disruption de la matière. La détection et la caractérisation de ce phénomène seraient réalisées par l'observation des ondes gravitationnelles émises, mesurées à l'aide d'interféromètres finement calibrés.

Excitation Nucléaire : La première étape du protocole nécessite l'excitation des noyaux atomiques à leurs états métastables. Les niveaux d'énergie requis pour de telles excitations sont significativement plus élevés que ceux fournis par les lasers de laboratoire standard, se situant dans la gamme des MeV (Megaélectronvolts) à GeV (Gigaélectronvolts). En conséquence, cette procédure requiert l'utilisation d'un accélérateur de particules capable de générer et de concentrer ces énergies élevées sur les noyaux atomiques ciblés.

Sélection de l'Isotope : Une sélection minutieuse de l'isotope approprié est essentielle. L'isotope choisi doit posséder un état métastable dont la demi-vie correspond au laps de temps souhaité pour le stockage d'énergie. Cette demi-vie doit être suffisamment brève pour permettre une libération contrôlée de l'énergie, mais assez longue pour assurer un stockage temporaire de l'énergie injectée. La demi-vie idéale serait de l'ordre d'une fraction de seconde.

Mesure des Ondes Gravitationnelles : La détection de l'inversion de masse serait réalisée par la mesure des ondes gravitationnelles émises lors de la disruption de la matière. Cette étape implique l'utilisation d'interféromètres de haute précision, calibrés pour détecter des variations extrêmement subtiles dans le champ gravitationnel résultant de l'expérience.

Conclusion : Ce protocole expérimental propose une méthode innovante pour étudier l'inversion de masse. L'expérimentation nécessitera un équipement de pointe, notamment un accélérateur de particules, et une expertise en physique nucléaire, en optique et en mesure des ondes gravitationnelles.

Quantification de la Gravitation

Une unification de la Théorie de la Relativité avec la Mécanique Quantique ne serait possible que par la quantification de la gravitation. Cependant, il n'y a pas de concept de quantification de l'énergie dans la Théorie de la Relativité, à l'exception de l'équivalence masse-énergie car l'équation de champ d'Einstein ne décrit pas fondamentalement les particules. C'est pourquoi la théorie des cordes est la seule approche contemporaine acceptée et acceptable pour combler le fossé entre la Relativité et la Mécanique Quantique. Néanmoins, cette unification est impossible suivant cette approche car la Mécanique Quantique considère les forces en termes de champs, et une particule est nécessaire dans ces champs pour transmettre l'interaction. Par exemple, le photon est la particule élémentaire qui transmet le champ électromagnétique, et sa quantification est possible grâce à la prise en compte de charges électriques positives et négatives. En revanche, la seule particule émergeant de la théorie des cordes pour transmettre la gravité est le graviton, mais cette pseudo-particule n'a jamais été observée expérimentalement. En effet, le concept de gravité quantique reste spéculatif dans ce modèle. Une conjecture alternative pour quantifier la gravitation à l'échelle quantique consisterait à considérer l'existence de masses de signes opposés qui présentent des propriétés répulsives dans le modèle, similaire au modèle des photons avec des charges électriques de signes opposés pour transmettre l'interaction.

3.3.6 Réponse aux critiques publiées par le Dr. Thibault Damour sur le site de l'IHES

La cohérence physique et mathématique du modèle Janus a été remise en question par l'académicien Thibault Damour dans une correspondance datée du 7 janvier 2019, envoyée sous forme de lettre recommandée avec accusé de réception à mon domicile [15].

Voici son contenu :

Thibault Damour
IHES, Bures-sur-Yvette,
7 Janvier 2019

à Jean-Pierre Petit, BP 55, 84122 Pertuis

Copies: Je me réserve le droit d'envoyer des copies de cette lettre à toutes les personnes que vous citez sur votre site, dans vos vidéos, et dans vos lettres, ainsi qu'à toute personne s'intéressant au "modèle Janus".

Objet: "modèle Janus".

Monsieur,

j'ai bien reçu votre lettre du 7 décembre 2018. En revanche je n'ai pas souvenir d'avoir reçu (précédemment) de vous une réponse aux objections et critiques que je vous avais communiquées dans ma lettre du 12 mars 2014, écrite après réception des prépublications de vos articles récents, et notamment: J. P. Petit. et G. d'Agostini, "Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy", Astrophys. Space Sci DOI 10.1007/s10509-014-2106-5); et J. P. Petit, et G. dAgostini, "Cosmological bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe". Mod. Phys. Lett. A Vol. 29 (no 34) (2014) 145082.

La réception de votre lettre m'a poussé à regarder de plus près la structure et les conséquences des équations de champ de ce que vous appelez "modèle Janus". J'ai en particulier poursuivi plus en détail les raisonnements et arguments que je vous avais indiqués dans ma lettre de 2014. J'ai ainsi démontré que *le "modèle Janus" était physiquement (et mathématiquement) incohérent.* Cette incohérence est particulièrement manifeste dans la limite quasi-newtonienne, où le "modèle Janus" implique que la matière ordinaire doit, à la fois, s'auto-attirer et s'auto-repousser gravitationnellement. J'ai posté mes raisonnements, et leurs conclusions, sur ma page web (lien "Sur le "modèle Janus de J. P. Petit" sur http://www.ihes.fr/~damour).

Vous comprendrez, après lecture, qu'il ne saurait être question de vous inviter à donner un séminaire à l'IHES, car vous n'avez pas de théorie cohérente, mathématiquement et physiquement bien définie, à présenter. [Notez d'ailleurs au passage que je ne suis pas, comme vous l'écrivez, "responsable du séminaire de cosmologie à l'IHES". Il n'y a en fait pas de séminaire régulier de cosmologie à l'IHES.]

Bien à vous,

T. Dam

Thibault Damour
Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette (France)

P.S.: Quand j' ai évoqué le nom de Souriau à Genève (le 5 novembre 2018) en répondant à une question concernant vos travaux, je faisais allusion au manque d'une dérivation Lagrangienne pouvant (éventuellement) assurer la cohérence du "modèle Janus". Il est facile de voir que la dérivation variationnelle donnée dans l'article de Sabine Hossenfelder (PRD 78, 044015, 2008) est mathématiquement invalide.

15. http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2019-Damour-lettre.pdf

Réexaminons le contexte, depuis 2014, nous avions vainement tenté d'être reçus par T. Damour, souhaitant lui exposer nos travaux, sans obtenir de réponse. Nous avions donc entrepris, dès 2017, de mettre en ligne sur la plateforme YouTube une longue série de 40 vidéos présentant le modèle Janus [16].

Indisposé par l'intérêt croissant du public pour ce modèle, T. Damour décida de mettre un point final à ce qu'il considérait comme une imposture scientifique. Il nous adressa donc ses arguments dans un premier article mis en ligne le même jour, le 4 janvier 2019, sur sa page de l'Institut des Hautes Études de Bures-sur-Yvette. Ce document, toujours en place, est accessible [17].

Des équations comme celles du modèle Janus doivent effectivement satisfaire des conditions mathématiques appelées *« conditions de Bianchi »*. Par exemple, les équations proposées en 2014, publiées dans la revue *Astrophysics and Space Science* [58] [18] dans l'article intitulé *Negative Mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy*, décrivant une solution instationnaire, homogène et isotrope, sont mathématiquement correctes. T. Damour, ignorant l'existence de ce premier papier, qui rend compte de l'accélération de l'expansion cosmique en l'imputant au contenu de l'univers en masse négative, se concentre sur un second article, paru la même année dans une autre revue *Modern Physics Letters A* [57], intitulé *Cosmological Bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe*. Dans cet article, le système d'équations est décrit de la manière suivante :

In our model, the Universe is an M_4 manifold associated not to one single metric, but to two: $g^{(+)}_{\mu\nu}$ and $g^{(-)}_{\mu\nu}$, the former linked to species of positive mass and energy, the latter to species of negative mass and energy. From these metrics, one can build the associated Ricci tensors, $R^{(+)}_{\mu\nu}$ and $R^{(-)}_{\mu\nu}$. A system of two coupled field equations was then proposed:[20]

$$R^{(+)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R^{(+)} g^{(+)}_{\mu\nu} = \chi (T^{(+)}_{\mu\nu} + T^{(-)}_{\mu\nu}) \,, \tag{2a}$$

$$R^{(-)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R^{(-)} g^{(-)}_{\mu\nu} = -\chi (T^{(+)}_{\mu\nu} + T^{(-)}_{\mu\nu}) \,, \tag{2b}$$

where the tensors $T^{(+)}_{\mu\nu}$ and $T^{(+)}_{\mu\nu}$ represent positive and negative energy contents (and positive and negative mass contents as well). Previously, in 1957, Bondi[23]

16. http://www.jp-petit.org/nouv_f/VIDEOS_JANUS.htm
17. https://www.ihes.fr/~damour/publications/JanusJanvier2019-1.pdf
18. https://jp-petit.org/papers/cosmo/2014-AstrophysSpaceSci2.pdf

Dans cet article, nous revisitions le cas particulier de la solution homogène et isotrope dépendante du temps, pour lequel le système d'équations devient, tel que publié dans l'article précédent :

So that our coupled field equation system becomes:

$$R^{(+)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(+)}g^{(+)}_{\mu\nu} = \chi^{(+)}\left[T^{(+)}_{\mu\nu} + \left(\frac{a^{(-)}}{a^{(+)}}\right)^3 T^{(-)}_{\mu\nu}\right], \tag{12a}$$

$$R^{(-)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(-)}g^{(-)}_{\mu\nu} = -\chi^{(-)}\left[\left(\frac{a^{(+)}}{a^{(-)}}\right)^3 T^{(+)}_{\mu\nu} + T^{(-)}_{\mu\nu}\right] \tag{12b}$$

On reconnaît les équations précédentes. Ce second article visait à étendre l'article précédent en montrant que les vitesses de la lumière pourraient être différentes dans les deux *« feuillets »*. Cependant, l'attention de T. Damour s'est portée sur le système d'équations de champ couplées (2a) et (2b).

Il est important de souligner le fait qu'un modèle en cosmologie ou en physique n'émerge pas instantanément sous une forme définitive, parfaitement cohérente sur le plan mathématique. Nous étions parfaitement conscients du problème qui restait à résoudre en 2014. Au moment où la critique de T. Damour, tout à fait fondée, portant sur ce système (2a-2b), est apparue, nous venions de résoudre celui-ci, sous la forme d'un article qui avait été publié quelques jours plus tôt (le premier en janvier 2019) dans la revue *Progress in Physics* [62] [19].

Nous avons donc écrit immédiatement à T. Damour pour lui envoyer notre article, tout en reconnaissant la pertinence de sa critique, pour laquelle nous le remercions.

Quel est donc le sujet d'une telle critique ?

Dans le système des équations de champ couplées (2a-2b), les termes des premiers membres font intervenir les tenseurs de Ricci $R^{(+)}_{\mu\nu}$ et $R^{(-)}_{\mu\nu}$ et les scalaires de Ricci correspondants $R^{(+)}$ et $R^{(-)}$. Ces termes se calculent à partir des deux métriques $g^{(+)}_{\mu\nu}$ et $g^{(-)}_{\mu\nu}$.

À l'aide de ces deux métriques on calcule alors la forme de deux opérateurs dits *de dérivation covariante* $\nabla^{(+)}_{\mu}$ et $\nabla^{(-)}_{\mu}$. Il se trouve que, de par leur forme, les deux premiers membres des deux équations satisfont identiquement la relation suivante :

$$\nabla^{(+)}_{\mu}\left(R^{(+)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(+)}g^{(+)}_{\mu\nu}\right) = 0 \tag{3.3.78}$$

$$\nabla^{(-)}_{\mu}\left(R^{(-)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(-)}g^{(-)}_{\mu\nu}\right) = 0 \tag{3.3.79}$$

19. `https://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2019-Progress-in-Physics-1.pdf`

Les deux tenseurs, $T_{\mu\nu}^{(+)}$ et $T_{\mu\nu}^{(-)}$, satisfont également la condition suivante :

$$\nabla_\mu^{(+)} T_{\mu\nu}^{(+)} = 0 \tag{3.3.80}$$
$$\nabla_\mu^{(-)} T_{\mu\nu}^{(-)} = 0 \tag{3.3.81}$$

Il s'ensuit que si les équations de champ correspondent à celles présentées en 2014 dans la revue *Modern Physics Letters A*, on devrait également avoir :

$$\nabla_\mu^{(+)} T_{\mu\nu}^{(-)} = 0 \tag{3.3.82}$$
$$\nabla_\mu^{(-)} T_{\mu\nu}^{(+)} = 0 \tag{3.3.83}$$

Ce sont ces équations qui conduisent alors à une contradiction.

Tenons maintenant le langage du physicien. Quel sens donner aux tenseurs des seconds membres des équations ? Ce sont les sources du champ gravitationnel.

Il y a deux *"observateurs"*. Un observateur de masse positive, qui perçoit ce champ gravitationnel à travers la métrique $g_{\mu\nu}^{(+)}$ en suivant les géodésiques qui en sont issues.

Et un observateur de masses négatives, qui perçoit ce champ gravitationnel à travers la métrique $g_{\mu\nu}^{(-)}$ en suivant les géodésiques qui en sont issues. Ainsi :

- La source du champ $T_{\mu\nu}^{(+)}$ représente l'action des masses positives sur les masses positives.
- La source du champ $T_{\mu\nu}^{(-)}$ représente l'action des masses négatives sur les masses négatives.

Dans les deux seconds membres se trouvent deux termes-sources, qu'on peut appeler des *tenseurs d'interaction*, et qui traduisent :

- L'action des masses négatives sur les masses positives. On pourrait désigner cela par $T_{\mu\nu}^{(-/+)}$.
- L'action des masses positives sur les masses négatives. On pourrait désigner cela par $T_{\mu\nu}^{(+/-)}$.

Dans ces conditions, cela nous aurait amené à écrire ce système d'équations de la manière suivante :

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left[T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-/+)} \right] \tag{3.3.84}$$
$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[T_{\mu\nu}^{(-)} + T_{\mu\nu}^{(+/-)} \right] \tag{3.3.85}$$

En posant a priori la satisfaction des conditions suivantes :

$$\nabla_\mu^{(+)} T_{\mu\nu}^{(-/+)} = 0 \tag{3.3.86}$$
$$\nabla_\mu^{(-)} T_{\mu\nu}^{(+/-)} = 0 \tag{3.3.87}$$

En se plaçant en régime instationnaire, homogène et isotrope, le système devenait alors :

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2}R^{(+)}g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi\left[T_{\mu\nu}^{(+)} + \frac{a^{(-)^3}}{a^{(+)^3}}T_{\mu\nu}^{(-)}\right] \tag{3.3.88}$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2}R^{(-)}g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi\left[T_{\mu\nu}^{(-)} + \frac{a^{(+)^3}}{a^{(-)^3}}T_{\mu\nu}^{(+)}\right] \tag{3.3.89}$$

Ce qui était alors mathématiquement et physiquement cohérent. C'est-à-dire que, dans ce cas, nos tenseurs d'interaction deviendraient :

$$T_{\mu\nu}^{(-/+)} = \frac{a^{(-)^3}}{a^{(+)^3}}T_{\mu\nu}^{(-)} \tag{3.3.90}$$

$$T_{\mu\nu}^{(+/-)} = \frac{a^{(+)^3}}{a^{(-)^3}}T_{\mu\nu}^{(+)} \tag{3.3.91}$$

Pourquoi avions-nous écrit le système d'équations (2a-2b) ? Ce qui revenait à considérer :

$$T_{\mu\nu}^{(-/+)} = T_{\mu\nu}^{(-)} \tag{3.3.92}$$

$$T_{\mu\nu}^{(+/-)} = T_{\mu\nu}^{(+)} \tag{3.3.93}$$

Il n'y avait aucune véritable raison. C'était une erreur de typographie. D'autant plus que nous avons immédiatement opté pour le cas particulier de la solution homogène, isotrope et non stationnaire représentée par les équations 3.3.88 et 3.3.89, physiquement et mathématiquement cohérente.

Nous aurions dû écrire le système d'équations 3.3.84 et 3.3.85. Mais le fait est qu'il a été présenté ainsi. T. Damour s'est donc concentré sur cette erreur, en fondant sur cette présentation incorrecte, l'idée que l'ensemble des travaux était frappé d'incohérence.

En partant de ce système d'équations incorrect, voyons comment se manifeste l'incohérence physique et mathématique qui en découle.

Les conditions de Bianchi sont d'essence mathématique. Elles ont une signification physique. Dans un contexte isotrope, homogène et non stationnaire, elles traduisent une conservation généralisée de l'énergie. Et, effectivement, dans le déroulement du calcul, dans les articles parus en 2014 dans les deux revues, nous aboutissons à la relation de conservation de l'énergie (Expression (10) de [57]).

On notera que, lorsqu'on considère l'équation de champ d'Einstein, celle-ci implique la conservation de l'énergie. En théorie bimétrique, la relation (10) de [57], qui traduit une conservation généralisée de l'énergie, est très satisfaisante pour le physicien.

Les conditions de cohérence mathématique, dans le cas non stationnaire, trouvent leur équivalent physique. Lorsque la situation est stationnaire, elles expriment un état d'équilibre entre la force de gravité et la force de pression à l'intérieur de la masse, dans le corps d'un astre massif qui crée le champ de gravitation.

Envisageons un astre massif dont la masse volumique est considérée comme approximativement constante, par exemple, la Terre. On sait calculer le champ de gravité à l'intérieur de la Terre : il est nul au centre et maximal à la surface. On sait que le champ (newtonien) produit par une masse sphérique, à une distance r du centre du système, est égal au champ newtonien qui serait produit par une masse $M(r)$ concentrée au centre géométrique, soit :

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \tag{3.3.94}$$

Ce champ gravitationnel est alors proportionnel à la distance au centre égal à $\frac{4}{3}\pi G r \rho$.

En écrivant que ce champ équilibre la force de pression, on débouche sur la relation d'Euler traduisant l'équilibre hydrostatique, à savoir l'équilibre entre la force gravitationnelle et la force de pression dans un fluide de densité uniforme :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM\rho}{r^2} \tag{3.3.95}$$

Le calcul de la condition de Bianchi doit nous donner cette relation pour un corps massif de masse volumique constante.

Voyons comment se gère ce type de calcul en relativité.

Nous allons maintenant quitter les notations des publications avec leurs métriques $g^{(+)}_{\mu\nu}$ et $g^{(-)}_{\mu\nu}$. Dans cet ouvrage, nous optons pour $g_{\mu\nu}$ et $h_{\mu\nu}$.

Les tenseurs de Ricci sont $R^{(g)}_{\mu\nu}$ et $R^{(h)}_{\mu\nu}$ et les scalaires de Ricci G et H.

Ceci nous renvoie à la page 65 de cet ouvrage. La dérivation du système d'équations de champ a fait apparaître la racine carrée du rapport des déterminants des deux métriques, ce qu'on retrouve également dans l'article [36] de S. Hossenfelder. Le système est alors écrit en notations tensorielles mixtes 3.3.54 et 3.3.55.

La relation 3.3.37 permet de retrouver la condition de nullité de la dérivée covariante des tenseurs d'interaction.

En relativité générale, l'analyse se concentre sur des cas spécifiques qui sont mathématiquement gérables, souvent associés à des situations physiques extrêmes. Ces situations incluent :

— Un univers homogène et isotrope qui est dynamique plutôt que statique.

— Des solutions stationnaires présentant une symétrie sphérique, invariantes sous l'action du groupe SO(3). Pour ces cas, il est possible de déterminer des solutions métriques qui décrivent à la fois l'intérieur et l'extérieur de corps sphéroïdaux.
— Des solutions stationnaires et axisymétriques, invariantes sous l'action du groupe SO(2). Ici, seule la métrique extérieure est connue, comme dans le cas de la métrique de Kerr. Le défi persistant en cosmologie est de trouver une métrique intérieure correspondante.

Ces scénarios délimitent le cadre de l'étude.

Dans le cadre du modèle Janus, l'approche est similaire. Comme les masses de signes opposés se repoussent mutuellement, elles ne coexistent pas. Par conséquent, l'étude se limitera aux situations où soit l'une soit l'autre des deux espèces de masses est prédominante, l'autre ayant une densité considérée comme négligeable dans la région d'espace en question.

Quand la masse positive est dominante, les équations de champ deviennent :

$$R_\mu^{\nu(g)} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu G = \chi T_\mu^{\nu(g,g)} \tag{3.3.96}$$

$$R_\mu^{\nu(h)} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu H = -\chi\sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_\mu^{\nu(g,h)} \tag{3.3.97}$$

C'est le même système d'équations, tensorielles, mais écrit en notation mixte. Dans ces conditions, les tenseurs métriques s'identifient avec le symbole de Kronecker (2.3.55). L'avantage est que les tenseurs sources s'expriment de façon simple :

$$T_\mu^{\nu(g,g)} = \begin{pmatrix} \rho^{(g)} {c^{(g)}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p^{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p^{(g)} \end{pmatrix} \tag{3.3.98}$$

$$T_\mu^{\nu(h,h)} = \begin{pmatrix} \rho^{(h)} {c^{(h)}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p^{(h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p^{(h)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p^{(h)} \end{pmatrix} \tag{3.3.99}$$

Lorsque c'est au contraire la masse négative qui domine (cas du *"Dipole Repeller"*), le système d'équations devient :

$$R_\mu^{\nu(g)} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu G = \chi\sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_\mu^{\nu(h,g)} \tag{3.3.100}$$

$$R_\mu^{\nu(h)} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu H = -\chi T_\mu^{\nu(h,h)} \tag{3.3.101}$$

Dans la suite de notre analyse, il suffira de considérer l'un des deux cas. Nous nous appuierons sur le système d'équations 3.3.96 et 3.3.97, tel que traité par T.

Damour dans son article de janvier 2019[20].

Dans le contexte de cette symétrie, le tenseur d'interaction à définir doit avoir une forme spécifique :

$$T_{\mu}^{\nu(g,h)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \tag{3.3.102}$$

Cela est nécessaire pour satisfaire la condition 3.3.37, qui décrit l'influence de l'espèce g sur l'espèce h, c'est-à-dire l'effet de *géométrie induite* par une population sur l'autre.

L'application de la condition de divergence nulle à l'équation 3.3.96 nous mène à l'équation d'Euler traduisant l'équilibre hydrostatique :

$$\frac{\mathrm{d}p^{(g)}}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM(r)\rho(r)^{(g)}}{r^2} \tag{3.3.103}$$

En nous basant sur le système constitué des deux équations (2a-2b) découlant de l'erreur typographique dans notre publication de 2014 dans *Modern Physics Letters A*, nous devons exprimer le tenseur d'interaction de la manière suivante :

$$T_{\mu}^{\nu(g,h)} = \begin{pmatrix} \rho^{(g)}{c^{(g)}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p^{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p^{(g)} \end{pmatrix} \tag{3.3.104}$$

Dans ces conditions, comme l'a démontré T. Damour dans son article de janvier 2019, la condition de divergence nulle conduit à la relation suivante contredisant 3.3.103 :

$$\frac{\mathrm{d}p^{(g)}}{\mathrm{d}r} = +\frac{GM(r)\rho(r)^{(g)}}{r^2} \tag{3.3.105}$$

Il existe évidemment une incohérence à la fois physique et mathématique, qui résulte d'un choix inapproprié du tenseur d'interaction. En effet, rien n'exige a priori que nous adoptions l'expression 3.3.104. La condition de divergence nulle peut être satisfaite en utilisant deux fonctions, $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ dont la nature reste à définir et à construire.

En revanche, ce nous avons pu établir en 2019, c'est que le choix de tenseur d'interaction suivant :

$$T_{\mu}^{\nu(g,h)} = \begin{pmatrix} \rho^{(g)}{c^{(g)}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^{(g)} \end{pmatrix} \tag{3.3.106}$$

20. dont le détail complet des calculs donnant les solutions métriques est présenté dans l'étude de la Compatibilité des Équations de Champ dans la Limite des Champs Faibles). Le second cas étant traité dans l'étude de la Compatibilité des Équations de Champ au voisinage du Répulseur du Dipôle.

faisait disparaître cette incohérence, dans le cas de l'approximation Newtonienne, dont nous rappelons les fondements :

— Les vitesses considérées sont faibles par rapport à la vitesse de la lumière
— Les effets de courbure de l'espace demeurent modérés.

Comment interprète-t-on la première condition ?

Le fluide cosmique est assimilé à un gaz parfait. Dans cette hypothèse, si $\langle v^2 \rangle$ représente la vitesse quadratique moyenne (associée à l'agitation thermique), la pression peut être exprimée par la relation suivante :

$$p^{(g)} = \frac{\rho^{(g)} \langle v^{(g)} \rangle^2}{3} \tag{3.3.107}$$

Ainsi, nous pouvons en déduire que :

$$v^{(g)} \ll c^{(g)} \implies |p^{(g)}| \ll \rho^{(g)} {c^{(g)}}^2 \tag{3.3.108}$$

En rappelant que la pression n'est rien d'autre qu'une densité volumique d'énergie cinétique liée à l'agitation thermique.

Comment peut-on gérer la condition de faible courbure ?

L'inégalité $r \gg 2m$ indique que l'on est suffisamment loin de la source gravitationnelle pour que les effets de la relativité générale soient négligeables [21]. En effet, vis-à-vis de grandes distances, la longueur $\frac{2GM}{c^2}$ [22] est totalement négligeable.

Il est important de noter que pour une étoile comme le Soleil, la longueur de Schwarzschild, qui dépend uniquement de la masse, est d'environ 3 km, ce qui est insignifiant par rapport au diamètre de l'étoile. Cette observation est valable pour tous les objets célestes observables, à l'exception des étoiles à neutrons où les effets de courbure de l'espace-temps deviennent significatifs. De même, les objets hypermassifs situés au cœur des galaxies sont exclus, leur nature restant à préciser avec plus de détails.

Par conséquent, cette approche restreint le champ d'étude aux objets qui s'inscrivent dans le cadre de l'approximation newtonienne, ce qui représente 99 % des objets observables.

Comme le démontre l'analyse détaillée qui suivra, en choisissant le tenseur d'interaction sous la forme 3.3.106 et en tenant compte de ces conditions newtoniennes, nous retrouvons la relation 3.3.103 et l'apparente contradiction est résolue.

21. où m est souvent remplacé par $\frac{GM}{c^2}$ pour obtenir une dimension de longueur, M étant la masse de l'objet

22. correspondant à la longueur caractéristique gravitationnelle appelée la *"longueur de Schwarzschild"*

Avant de détailler cette analyse, revenons sur nos échanges avec T. Damour. En vain, nous avons tenté de lui communiquer ce point en 2019. Nous n'avons reçu aucune réponse à nos courriers, ni à notre invitation à une rencontre informelle "devant un tableau noir, sans enregistrement ni témoins". Durant cinq ans, nous avons fait des démarches similaires, y compris auprès d'Étienne Ghys, mathématicien et géomètre éminent, ainsi que secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, concernant ces questions théoriques.

À la fin de l'année 2019, face à l'absence de réponses, nous avons mis en ligne le détail de ce calcul sur notre site internet pour que nos collègues scientifiques, enseignants, ingénieurs et étudiants puissent y accéder [23].

Il fournit une explication complète des calculs.

Le détail des calculs est présenté dans l'étude de la Compatibilité des Équations de Champ dans la Limite des Champs Faibles et l'attention pourra être portée sur les équations 3.3.180 et 3.3.223, lesquelles, comme expliqué, conduisent toutes deux à la relation d'Euler sous l'approximation newtonienne, à savoir l'équation 3.3.103, faisant disparaître l'apparente contradication mathématique et physique.

Nous avions informé T. Damour de notre observation après la publication de son article le 7 janvier 2019. Cependant, il semble qu'il n'ait pas pris connaissance de ce texte avant novembre 2022.

Plusieurs collègues scientifiques et universitaires, ayant intégré le détail de ces calculs et étant consternés par le silence de T. Damour pendant trois ans, lui ont envoyé une lettre recommandée avec accusé de réception le 2 novembre 2022, lui demandant de répondre à nos interrogations [24].

En réponse, T. Damour a rapidement publié un nouvel article en ligne le 12 décembre 2022 [25].

Permettez-moi de citer un extrait de cet article :

23. http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2019-to-Damour-3.pdf
24. https://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2022-11-02-Duval-to-Damour.pdf
25. https://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2022-12-12-Damour-IHES.pdf

Dans le document "Sur le "modèle Janus" de J. P. Petit" (mis en ligne sur http://www.ihes.fr/˜damour le 4 Janvier 2019), j'avais expliqué en grand détail l'incohérence physique et mathématique de la version du modèle Janus publiée en 2014 par J. P. Petit and G. d'Agostini; c.a.d.

J. P. Petit. et G. d'Agostini, "Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy", Astrophys. Space Sci DOI 10.1007/s10509-014-2106-5);

J. P. Petit, et G. d'Agostini, "Cosmological bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe". Mod. Phys. Lett. A Vol. 29 (no 34) (2014) 145082.

Quelques mois plus tard (le 12 Mars 2019), j'ai reçu une lettre de J. P. Petit affirmant qu'il avait maintenant résolu l'incohérence (que j'avais signalée) de la version 2014 du modèle Janus dans un nouvel article:

Jean-Pierre Petit, Gilles D'Agostini and Nathalie Debergh [disons PDD19], " Physical and Mathematical Consistency of the Janus Cosmological Model (JCM)", Progress in Physics, **15**, issue 1, (2019) (http://www.ptep-online.com)[1]

Dans sa lettre du 12 mars 2019 (et dans un courriel ultérieur du 3 avril 2019) J. P. Petit affirmait qu'il avait corrigé l'incohérence que j'avais pointée du doigt par "une légère modification des seconds membres des équations Janus", et me demandait de modifier mon document du 4 janvier 2019 pour prendre en compte son travail de 2019. J'ai répondu à J. P. Petit dans un courriel d'avril 2019 en y disant que: "Dans votre dernier article, "Physical and Mathematical Consistency of the JCM" (January 2019), vous dites avoir corrigé l'incohérence (soulignée dans mon texte) du modèle Janus par "une légère modification des seconds membres des équations Janus". Mais, les sections 3 et 4 de votre article, loin de fournir une déduction bien définie d'une théorie modifiée cohérente, sont mathématiquement incohérentes, et conduisent, selon votre article lui-même, à une incohérence mathématico-physique."

Malgré cette réponse, il semble que ni J.P. Petit, ni ses collaborateurs (ni plusieurs de ses amis qui m'ont inondé de lettres recommandées ces derniers mois) n'ont apprécié l'incohérence mathématico-physique des équations de champ publiées dans leur article de 2019. Pour clarifier cette situation, je discute ci-

Et il écrit, plus loin :

Une première nouvelle incohérence concerne l'idée de base du modèle Janus (tel qu'il a été défini dans un cadre newtonien), cad le fait que, dans ce modèle, *les masses positives attirent les masses positives; les masses négatives attirent les masses négatives, mais les masses positives et négatives se repoussent.*

Dans son analyse, T. Damour remet en cause ce schéma d'interaction en écrivant :

Cette loi de conservation (par rapport à la connexion ∇_- de la métrique $g^-_{\mu\nu}$) implique, comme il est bien connu, qu'une particule d'épreuve à masse négative doit suivre une *géodésique* de la métrique $g^-_{\mu\nu}$. En particulier, une particule d'épreuve à masse négative autour d'une solution de Schwarzschild de masse négative, sera *repoussée*, et non attirée par la masse centrale négative. Nous avons donc ici une violation frappante d'une des idées de base du modèle Janus. Cela montre que les deux équations de champ (1) ne réussissent pas à donner une description relativiste de la situation physique qu'elles sont censées décrire.

Et finit par conclure :

doit suivre une *géodésique* de la métrique $g^-_{\mu\nu}$. En particulier, une particule d'épreuve à masse négative autour d'une solution de Schwarzschild de masse négative, sera *repoussée*, et non attirée par la masse centrale négative. Nous avons donc ici une violation frappante d'une des idées de base du modèle Janus.

Ceci montre que T. Damour n'a pas pris en compte l'effet du signe *"moins"* présent dans le second membre de la seconde équation de champ, dont la solution est la métrique $h_{\mu\nu}$, d'où découlent les géodésiques suivies par les masses négatives :

$$R^{(g)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \chi \left(T^{(g,g)}_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T^{(h,g)}_{\mu\nu} \right) \tag{3.3.109}$$

$$R^{(h)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = -\chi \left(T^{(h,h)}_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T^{(g,h)}_{\mu\nu} \right) \tag{3.3.110}$$

Nous avons utilisé les notations de cet ouvrage. Ainsi, sans le signe *"moins"*, les masses négatives repousseraient les masses négatives, ce qui correspond à la contribution du terme $T^{(h,h)}_{\mu\nu}$ au champ. Inversement, les masses positives s'attirent, comme indiqué par la contribution du terme $\sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T^{(g,h)}_{\mu\nu}$. Cependant, c'est le signe *"moins"* qui inverse le sens de ces forces, un détail que T. Damour semble avoir omis.

Dans la suite de son article, T. Damour aborde la question de la satisfaction des conditions de Bianchi dans le régime d'approximation newtonienne, un point qu'il semble avoir découvert récemment, avec trois ans de retard. Il déclare :

équation (5). Il est vrai que cette modification élimine la violente contradiction entre les deux équations newtoniennes (5), en les replaçant par l'unique (et correcte) équation de structure newtonienne

$$p'_+ = -G\rho_+ \frac{M_+(r)}{r^2} \,. \tag{6}$$

Ensuite, il écrit les deux équations d'état :

où la source $T^+_{\mu\nu}$ est stationnaire et à symétrie sphérique. Ces solutions ont été écrites[2] dans les éqs. (45), (46) de PDD19, c-a-d (avec $' = d/dr$)

$$\begin{aligned} p'_+ &= -G\left(\rho_+ + \frac{p_+}{c^2}\right)\frac{M_+(r) + 4\pi p_+ r^3/c^2}{r(r - 2GM_+(r)/c^2)} \,, \\ p'_+ &= -G\left(\rho_+ - \frac{p_+}{c^2}\right)\frac{M_+(r) - 4\pi p_+ r^3/c^2}{r(r + 2GM_+(r)/c^2)} \,, \end{aligned} \tag{7}$$

où $p_+(r)$ est la pression (de la matière ordinaire), $\rho_+(r)$ sa densité, et $M_+(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho_+(r)$ est la masse (positive) contenue dans le rayon r. Notons que l'on passe de la première équation (7) à la seconde par les changements: $p_+ \to -p_+$ et $G \to -G$.

Il est vrai que si l'on prend formellement la limite newtonienne $\frac{1}{c^2} \to 0$ dans les équations (7), ces deux équations deviennent compatibles, car elles deviennent toutes deux identiques à l'unique équation de structure newtonienne (6).

En convenant trois ans plus tard, que la contradiction précédemment observée disparaît dans le cadre de l'approximation newtonienne.

Nous avons immédiatement écrit à T. Damour pour lui signaler que son interprétation concernant le sens des forces était incorrecte, et que la contradiction relative aux lois d'interaction découlait uniquement de ses erreurs de calcul[26].

Nous lui écrivons alors :

26. https://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2022-12-14-to-Damour.pdf

Vous écrivez, je vous cite :

- *Une nouvelle incohérence concerne l'idée de base du modèle Janus (tel qu'il a été défini dans un cadre newtonien), c'est-à-dire le fait que, dans ce modèle, les masses positives attirent les masses positives ; les masses négatives attirent les masses négatives, mais les masses positives et négatives se repoussent. Une conséquence particulière de ce principe fondamental du modèle Janus doit être qu'une étoile de masse négative doit attirer les masses d'épreuve négatives dans son voisinage. Mais de fait les équation Janus impliquent le contraire, les masses d'épreuve négatives sont repoussées.*

Si c'était vrai, cela serait effectivement très grave et constituerait une incohérence ingérable, rhédibitoire.

Malheureusement, c'est complètement faux !

Votre conclusion montre que vous n'avez rien compris au modèle, dont la propriété centrale est, grâce au signe moins (que vous oubliez) qui précède la constante d'Einstein dans le second membre de la seconde équation, de reconstituer les principes d'équivalence et d'action-réaction, donc de produire des lois d'interaction permettant d'échapper à l'ingérable paradoxe runaway. Et tel était son but, pour permettre à des masses négatives de constituer une nouvelle donne en cosmologie.

T. Damour retire sa version datée du 12 décembre 2022 et la remplace par un nouvel article le 28 décembre 2022 [27].

Citons-le :

$$
\begin{aligned}
\frac{dv^i_+}{dt} &= -c^2\Gamma^{+0}_{i0} = +\frac{1}{2}c^2\partial_i g^+_{00} = +\partial_i U\,, \\
\frac{dv^i_+}{dt} &= -c^2\Gamma^{-0}_{i0} = +\frac{1}{2}c^2\partial_i g^-_{00} = -\partial_i U\,. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

La première de ces équations implique qu'une masse d'épreuve positive est attirée par une masse-source positive et repoussée par une masse-source négative, alors que la deuxième de ces équations implique l'inverse: une masse d'épreuve positive doit aussi [comme conséquence nécessaire des éqs (1)] être repoussée par une masse-source positive et attirée par une masse-source négative. En refaisant ce raisonnement à partir d'une source d'épreuve constituée d'une répartition continue de *"poussière" à masse négative*, c.a.d. $T^{1-}_{\mu\nu} = \rho_1^- u^-_\mu u^-_\nu$, on obtiendrait, mutatis mutandis, deux autres équations similairement contradictoires pour la variation de vitesse $\frac{dv^i_-}{dt}$ d'une masse d'épreuve négative. Ceci montre de façon frappante l'incohérence du modèle Janus (ici au niveau newtonien).

Malgré la précision apportée dans notre correspondance du 12 décembre 2022, T. Damour a maintenu sa conclusion sur l'incohérence des lois de force. Cela démontre qu'il n'a pas saisi ou n'a pas souhaité saisir les explications fournies.

Il est ensuite à noter, en réexaminant son texte du 12 décembre 2022, que bien que l'approximation newtonienne élimine la contradiction, il revisite le cas d'une

27. https://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2022-12-28-Damour-IHES.pdf

solution relativiste pour l'intérieur d'étoiles à neutrons, où de telles approximations sont inadéquates. En effet, les termes $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ présents dans le tenseur d'interaction doivent être choisis de manière à satisfaire la condition de divergence nulle 3.3.37. Cela permettrait théoriquement de construire la métrique $h_{\mu\nu}$. Cependant, quelle observation tangible cela apporterait-il ? **Aucune**.

En effet, cela permettrait de modéliser les géodésiques empruntées par les photons d'énergie négative, qui restent non observables. Par conséquent, nous ne sommes pas obligés de construire cette seconde métrique. Cependant, il est parfaitement possible de construire la métrique intérieure $g_{\mu\nu}$ sous sa forme non linéaire, à savoir celle d'une *"solution intérieure de Schwarzschild"*, qui mène à la célèbre équation d'état de TOV. Cette solution avait déjà été proposée par Karl Schwarzschild dans son second article de février 1916 [74].

Qu'en est-il alors lorsque le champ est généré par une masse négative ? Nous observons cela dans des régions où l'effet répulsif est manifeste, tant sur les masses que sur les photons à énergie négative, en raison de la présence d'un conglomérat de masse négative agissant comme le *"Dipole Repeller"*.

Dans de tels cas, où l'objet est étendu, l'approximation newtonienne est tout à fait suffisante. Les vitesses d'agitation thermique des atomes d'antimatière à masse négative sont insignifiantes comparées à la vitesse de la lumière à énergie négative. De même, le rayon de Schwarzschild associé à l'objet est négligeable par rapport à son diamètre.

La seule situation où les corrections relativistes pourraient être nécessaires serait dans le cas d'une étoile à neutrons à masse négative. Cependant, de tels objets n'existent pas selon notre approche (voir la section Nature de l'antimatière primordiale).

Nous avons ainsi établi un cadre théorique capable de couvrir tous les cas possibles et de répondre aux objections soulevées par T. Damour.

T. Damour a finalement reconnu, après trois ans de retard dans ses articles des 12 et 28 décembre 2022, qu'il n'y avait aucune incohérence manifeste en restant dans le cadre de l'approximation newtonienne. Par conséquent, il n'est pas tenu de fournir une explication détaillée du calcul menant aux équations d'état. Néanmoins, nous jugeons cela nécessaire pour convaincre le lecteur.

Il n'est cependant pas indispensable de fournir une analyse détaillée du calcul des opérateurs de dérivée covariante. La contradiction en dehors du cadre newtonien se manifeste simplement dans l'effort de construire une solution métrique basée sur des hypothèses de symétrie simples, à savoir :

- Stationnarité
- Invariance sous l'action du groupe SO(3)

Il pourrait être objecté que cela limite l'examen aux systèmes présentant une symétrie sphérique et exempts de rotation. Mais pour être rigoureux, on devrait considérer :

- La métrique extérieure, à savoir celle de Kerr.
- Une métrique intérieure décrivant la géométrie à l'intérieur d'une masse en rotation.

La construction de cette seconde métrique, qui serait le complément de celle de Kerr, reste à ce jour une tâche inachevée.

On se limite donc à la construction de la solution intérieure à symétrie sphérique dont le détail des calculs est présenté dans l'étude de la Compatibilité des Équations de Champ dans la Limite des Champs Faibles.

3.3.7 Compatibilité des Équations de Champ dans la Limite des Champs Faibles

Pour obtenir une solution géométrique complète, le modèle doit être capable de reproduire la solution initialement développée par K. Schwarzschild en 1916 [75], et de l'étendre à la géométrie intérieure d'une sphère emplie d'un fluide incompressible [74].

La maîtrise de cette solution est cruciale pour le calcul de l'atténuation de la luminosité d'une source distante, après que les rayons lumineux qu'elle émet ont traversé un amas de masse négative. En effet, alors que les photons d'énergie positive interagissent avec la matière de masse positive [28], ils ne subissent qu'une interaction anti-gravitationnelle lorsqu'ils traversent une masse négative. La représentation schématique de ce phénomène est illustrée dans la 3.16.

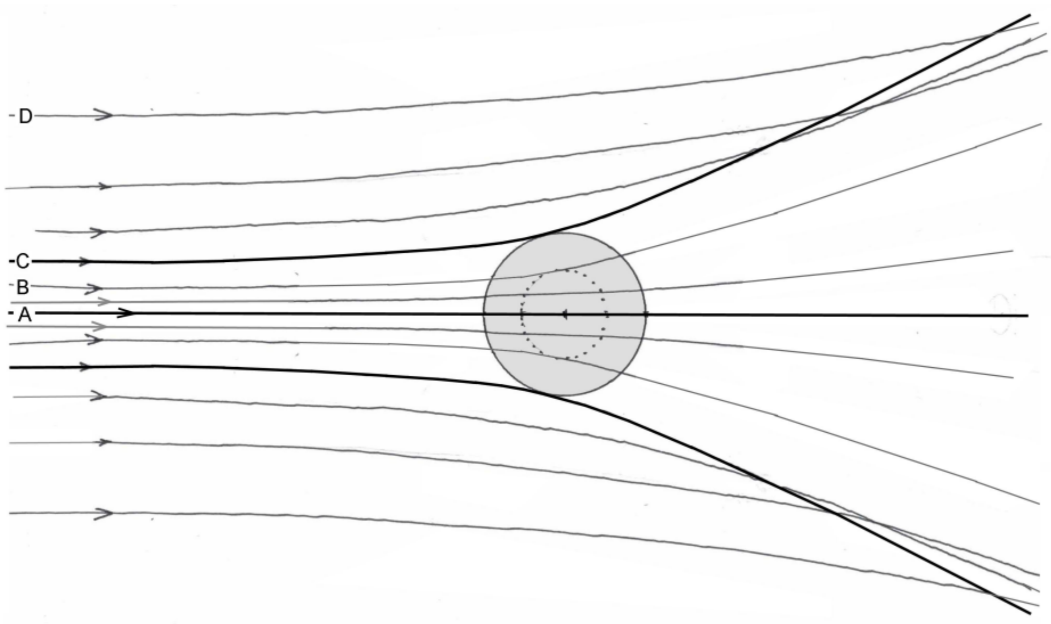


FIGURE 3.16 – Allure de la déviation des photons d'énergie positive par une masse négative.

Une situation analogue se présenterait si nous considérions un faisceau de neutrinos parallèles d'énergie positive (ou de faible masse) traversant une masse homogène, également positive (figure 3.17). Les trajectoires, dans les deux cas, lorsque la courbure reste modérée, sont très proches d'hyperboles. Dans les deux cas, l'angle de déviation, positif ou négatif, atteint un maximum (C) lorsque la géodésique est tangente à la limite de la masse, positive ou négative. Il diminue ensuite régulièrement jusqu'à zéro à de très grandes distances (D). L'angle de déviation est nul, à cause de la symétrie, lorsque la géodésique passe par le centre de la masse (A).

28. pouvant être émis ou absorbés par celle-ci.

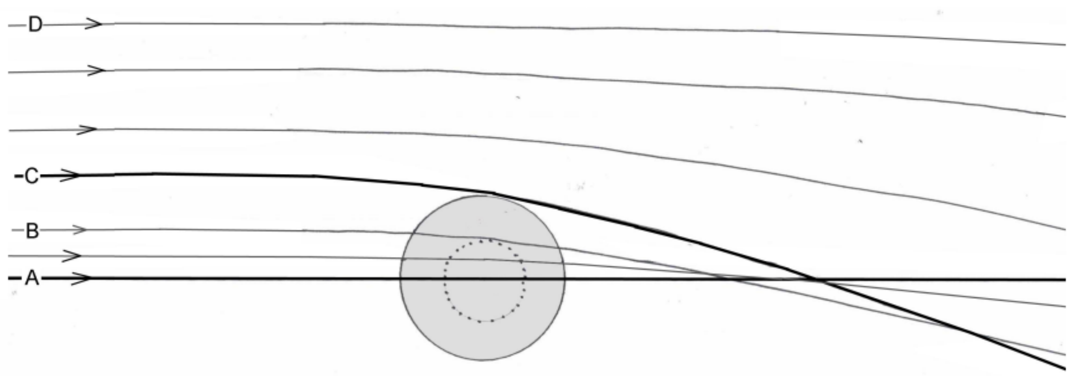


FIGURE 3.17 – Allure de la déviation des neutrinos d'énergie positive par une masse positive.

Dans ce calcul des trajectoires géodésiques correspondant à cette *"solution intérieure de Schwarzschild"* [74] et sous conditions quasi-newtoniennes, les particules, de masse nulle ou non nulle, subissent la déviation (B) qui correspondrait à l'action de la masse contenue à l'intérieur de la sphère pointillée, concentrée au centre. Une sphère tangente à la ligne (C) correspond à la déviation maximale. Pour la ligne (A), passant par le centre de la sphère, elle est nulle. À la distance (D), la déviation tend vers zéro.

En développant un calcul similaire à la construction de la métrique intérieure (14.47) de [1], nous pouvons écrire :

$$\mathrm{d}s^{(g)^2} = -e^{\nu^{(g)}}\mathrm{d}x^{0^2} + e^{\lambda^{(g)}}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \tag{3.3.111}$$

$$\mathrm{d}s^{(h)^2} = -e^{\nu^{(h)}}\mathrm{d}x^{0^2} + e^{\lambda^{(h)}}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \tag{3.3.112}$$

Considérons à présent ces deux métriques sous la signature $(+---)$:

$$\mathrm{d}s^{(g)^2} = e^{\nu(r)^{(g)}}\mathrm{d}x^{0^2} - e^{\lambda(r)^{(g)}}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\phi^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \tag{3.3.113}$$

$$\mathrm{d}s^{(h)^2} = e^{\nu(r)^{(h)}}\mathrm{d}x^{0^2} - e^{\lambda(r)^{(h)}}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\phi^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \tag{3.3.114}$$

Dans le cadre de la relativité générale, la forme de la métrique décrivant un espace-temps à symétrie sphérique et statique, est souvent exprimée en termes de fonctions spécifiques pour faciliter l'analyse des équations d'Einstein. Une des solutions les plus adaptées à ces équations est la métrique extérieure de Schwarzschild 2.3.117, qui décrit l'espace-temps autour d'une masse ponctuelle dans un espace vide. Cette solution ne fait pas explicitement usage de fonctions exponentielles dans sa forme la plus connue, mais des formes plus générales de métriques à symétrie sphérique peuvent les introduire pour modéliser diverses configurations de matière.

Dans des situations où la distribution de matière n'est pas ponctuelle ou dans des régimes à forte courbure spatio-temporelle, des fonctions exponentielles telles que $e^{\nu(r)}$ et $e^{\lambda(r)}$ peuvent être introduites pour décrire le potentiel gravitationnel et la courbure de l'espace. Ces fonctions exponentielles facilitent le traitement mathématique des équations différentielles en assurant certaines propriétés physiques, telles que la platitude de l'espace-temps à l'infini [29].

La fonction $\nu(r)$ est liée au potentiel gravitationnel perçu par un observateur à l'infini, tandis que $\lambda(r)$ concerne la courbure de l'espace due à la présence de matière. Pour une métrique générale à symétrie sphérique, l'élément de ligne peut être écrit sous la forme 3.3.113. Cette formulation permet d'adapter la métrique à différentes distributions de matière et de capturer le comportement de la gravité dans des contextes variés, allant des champs gravitationnels faibles aux régimes extrêmes près d'objets supermassifs tels que des étoiles à neutrons. Ainsi, le potentiel gravitationnel peut augmenter de manière *"exponentielle"* à proximité de tels objets, et les fonctions exponentielles peuvent capturer ce comportement de manière précise.

Dans la suite de notre analyse, nous nous appuierons sur le système d'équations 3.3.96 et 3.3.97 en régime stationnaire où les masses négatives sont négligeables par rapport aux masses positives. Nous déterminerons alors la solution de chacune de ces équations de champ dans la limite newtonienne.

Solution de la première Équation de Champ 3.3.96

Nous pouvons exprimer le tenseur métrique 3.3.113 de la manière suivante [30] :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{3.3.115}$$

Et nous savons que :

$$g^{\nu}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu} \tag{3.3.116}$$

Nous allons à présent calculer les symboles de Christoffel [31] du tenseur métrique 3.3.113 selon la relation 2.3.73.

Nous pouvons remarquer qu'il s'agit d'une métrique statique et à symétrie sphérique souvent utilisée en relativité générale. Les composantes non nulles du tenseur métrique sont :

$$g_{tt} = e^{\nu(r)} \tag{3.3.117}$$

$$g_{rr} = -e^{\lambda(r)} \tag{3.3.118}$$

$$g_{\theta\theta} = -r^2 \tag{3.3.119}$$

$$g_{\phi\phi} = -r^2\sin^2\theta \tag{3.3.120}$$

29. Il s'agit d'une caractéristique de l'espace-temps de Minkowski.

30. Pour simplifier l'écriture, l'exposant (g) ne sera pas pris en compte dans toute la démonstration.

31. Les symboles de Christoffel sont également connus sous le nom de coefficients de connexion de Levi-Civita comme nous l'avons déjà vu.

Et les composantes de la métrique inverse $g^{\beta\alpha}$ sont simplement l'inverse des éléments diagonaux[32] :

$$g^{tt} = e^{-\nu(r)} \tag{3.3.121}$$

$$g^{rr} = -e^{-\lambda(r)} \tag{3.3.122}$$

$$g^{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2} \tag{3.3.123}$$

$$g^{\phi\phi} = -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \tag{3.3.124}$$

Étant donné que cette métrique est diagonale, le calcul se simplifie considérablement. Beaucoup des symboles de Christoffel seront nuls parce que les dérivées partielles des composantes non diagonales sont nulles. Nous devons seulement calculer les composantes non nulles pour :

— Γ^r_{tt} :

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2} g^{rr} \left(-\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda}) \left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(e^{\nu}) \right] = \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu' \tag{3.3.125}$$

— Γ^r_{rr} :

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2} g^{rr} \left(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda}) \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(-e^{\lambda}) \right] = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2} \lambda' \tag{3.3.126}$$

— $\Gamma^r_{\theta\theta}$:

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2} g^{rr} \left(-\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(-2r) = r e^{-\lambda} \tag{3.3.127}$$

— $\Gamma^r_{\phi\phi}$:

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = \frac{1}{2} g^{rr} \left(-\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(-2r \sin^2\theta) = r e^{-\lambda} \sin^2\theta \tag{3.3.128}$$

— $\Gamma^\theta_{r\theta}$ et $\Gamma^\phi_{r\phi}$:

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) (-2r) = \frac{1}{r} \tag{3.3.129}$$

— $\Gamma^\theta_{\phi\phi}$:

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(-\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) (-2r^2 \sin\theta \cos\theta) = \sin\theta \cos\theta \tag{3.3.130}$$

— $\Gamma^\phi_{\theta\phi}$:

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left(\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \right) (2r^2 \sin\theta \cos\theta) = \cot\theta \tag{3.3.131}$$

32. Les éléments non diagonaux sont nuls.

— Γ^t_{rt} :

$$\Gamma^t_{rt} = \frac{1}{2} g^{tt} \left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\frac{d}{dr} e^{\nu} \right) = \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} = \frac{1}{2} \nu' \tag{3.3.132}$$

Nous pouvons alors calculer les composantes nécessaires du tenseur de Riemann pour obtenir une des composantes R_{tt} du tenseur de Ricci dans un espace-temps à symétrie sphérique selon la relation suivante (obtenue à partir de 3.3.20) :

$$R_{tt} = R^r_{trt} + R^\theta_{t\theta t} + R^\phi_{t\phi t} \tag{3.3.133}$$

Or la première composante est donnée par :

$$R^r_{trt} = \partial_t \Gamma^r_{rt} - \partial_r \Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{t\lambda} \Gamma^\lambda_{rt} - \Gamma^r_{r\lambda} \Gamma^\lambda_{tt} \tag{3.3.134}$$

Ainsi, en remplaçant chaque symbole de Christoffel par sa valeur calculée précédemment, et en sachant que la métrique est statique, nous obtenons :

$$R^r_{trt} = -\frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} \right) \tag{3.3.135}$$

La seconde composante nécessaire $R^\theta_{t\theta t}$ se calcule également de manière triviale :

$$R^\theta_{t\theta t} = -\Gamma^\theta_{\theta r} \Gamma^r_{tt} \tag{3.3.136}$$

$$R^\theta_{t\theta t} = -\frac{1}{r} \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu' \tag{3.3.137}$$

$$R^\theta_{t\theta t} = -\frac{1}{2r} e^{\nu-\lambda} \nu' \tag{3.3.138}$$

$$\tag{3.3.139}$$

La dernière composante $R^\phi_{t\phi t}$ est identique à $R^\theta_{t\theta t}$ [33] :

$$R^\phi_{t\phi t} = -\frac{1}{2r} e^{\nu-\lambda} \nu' \tag{3.3.140}$$

Finalement, en combinant les différents termes de la composante temporelle R_{tt} du tenseur de Ricci, nous obtenons :

$$R_{tt} = e^{\nu-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\nu'}{r} \right) \tag{3.3.141}$$

En utilisant la même méthode, nous pouvons déduire les autres composantes diagonales du tenseur de Ricci :

$$R_{rr} = \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \tag{3.3.142}$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\nu' r}{2} - \frac{\lambda' r}{2} \right) - 1 \tag{3.3.143}$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2\theta \tag{3.3.144}$$

33. En raison de l'isotropie des coordonnées angulaires

Pour déterminer le scalaire de Ricci[34], nous devons d'abord exprimer les composantes du tenseur de Ricci en utilisant des indices mixtes. Pour cela, nous élevons un indice en utilisant la métrique inverse selon la relation suivante :

$$R^{\mu}_{\nu} = \sum_{\rho=0}^{3} g^{\mu\rho} R_{\rho\nu} \tag{3.3.145}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$R^{t}_{t} = g^{tt} R_{tt} = -e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right) \tag{3.3.146}$$

$$R^{r}_{r} = g^{rr} R_{rr} = -e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r}\right) \tag{3.3.147}$$

$$R^{\theta}_{\theta} = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r}\right) + \frac{1}{r^2} \tag{3.3.148}$$

$$R^{\phi}_{\phi} = R^{\theta}_{\theta} \tag{3.3.149}$$

Nous pouvons en déduire le scalaire de Ricci :

$$R = R^{\mu}_{\mu} = R^{t}_{t} + R^{r}_{r} + R^{\theta}_{\theta} + R^{\phi}_{\phi} \tag{3.3.150}$$

$$R = 2e^{-\lambda}\left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2}{r^2} \tag{3.3.151}$$

Or, le tenseur d'Einstein est donnée en mode mixte par la relation suivante :

$$G^{\nu}_{\mu} = R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} R \delta^{\nu}_{\mu} \tag{3.3.152}$$

Ainsi, nous pouvons établir chacune des composantes du tenseur d'Einstein :

$$G^{t}_{t} = R^{t}_{t} - \frac{1}{2} R \delta^{t}_{t} = R^{t}_{t} - \frac{1}{2} R = e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} \tag{3.3.153}$$

$$G^{r}_{r} = R^{r}_{r} - \frac{1}{2} R \delta^{r}_{r} = R^{r}_{r} - \frac{1}{2} R = e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} \tag{3.3.154}$$

$$G^{\theta}_{\theta} = R^{\theta}_{\theta} - \frac{1}{2} R \delta^{\theta}_{\theta} = R^{\theta}_{\theta} - \frac{1}{2} R = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r}\right) \tag{3.3.155}$$

Or, si nous considérons l'équation de champ d'Einstein en mode mixte :

$$E^{\nu}_{\mu} = \chi T^{\nu}_{\mu} \tag{3.3.156}$$

Nous pouvons exprimer ses composantes dans le même contexte mathématique :

$$\begin{aligned} e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} &= \chi T^{t}_{t} \\ e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} &= \chi T^{r}_{r} \\ e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r}\right) &= \chi T^{\theta}_{\theta} \end{aligned} \tag{3.3.157}$$

34. Le scalaire de Ricci quantifie la courbure totale de l'espace-temps

D'où :

$$\chi T_t^t - \chi T_r^r = -\left(\nu' + \lambda'\right)\frac{e^{-\lambda}}{r} \tag{3.3.158}$$

Examinons la construction classique de la métrique intérieure en partant de l'expression du tenseur énergie-impulsion $T_\mu^{\nu(g,g)}$ de la première équation de champ 3.3.96 sous sa forme classique en mode mixte [35] :

$$T_\mu^{\nu(g,g)} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p}{c^2} \end{pmatrix} \tag{3.3.159}$$

Les équations 3.3.157 et 3.3.158 s'écrivent alors de la manière suivante :

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = \chi\rho \tag{3.3.160}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = -\chi\frac{p}{c^2} \tag{3.3.161}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r}\right) = -\chi\frac{p}{c^2} \tag{3.3.162}$$

$$-\frac{\nu' + \lambda'}{r}e^{-\lambda} = \chi\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \tag{3.3.163}$$

D'où nous pouvons en déduire :

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = e^{-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r}\right] \tag{3.3.164}$$

$$e^{\lambda}\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu' + \lambda'}{2r} - \frac{\nu''}{2} \tag{3.3.165}$$

Pour résoudre ces équations différentielles, nous pouvons procéder de manière similaire à l'expression (14.15) de la référence [1] du chapitre 14 en posant :

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \implies 2m(r) = r\left(1 - e^{-\lambda}\right) \tag{3.3.166}$$

Avec :

$$m = \frac{GM}{c^2} \tag{3.3.167}$$

En considérant 3.3.160, si nous dérivons cette expression, nous obtenons [36] :

$$2m' = \left(1 - e^{-\lambda}\right) + r\lambda' e^{-\lambda} \tag{3.3.168}$$

$$-\frac{2m'}{r^2} = \frac{-1 + e^{-\lambda} - r\lambda' e^{-\lambda}}{r^2} = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) \tag{3.3.169}$$

$$m' = -\frac{r^2\chi\rho}{2} = \frac{4\pi r^2 G}{c^2}\rho \tag{3.3.170}$$

35. (13.1) page 425 de [1]

36. Par convention, nous adoptons la valeur de la constante gravitationnelle d'Einstein $\chi = -\frac{8\pi G}{c^2}$ selon (10.98) de [1].

De manière similaire à l'équation (14.18) de [1], nous pouvons en déduire :

$$m(r) = \frac{G\rho}{c^2}\int_0^r 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{G}{c^2} \tag{3.3.171}$$

Ainsi, l'expression 3.3.161 couplée à l'expression 3.3.166 nous permet d'obtenir :

$$\nu' = \frac{r}{r(r-2m)}\left(-\chi\frac{pr^2}{c^2}+1\right) - \frac{(r-2m)}{r(r-2m)} \tag{3.3.172}$$

D'où :

$$\nu' = 2\frac{m + \frac{4\pi G p r^3}{c^4}}{r(r-2m)} \tag{3.3.173}$$

Or, en procédant à la dérivation de l'expression 3.3.161, nous obtenons :

$$-\chi\frac{p'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - \lambda' e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right) + e^{-\lambda}\left(\frac{-2}{r^3}+\frac{\nu''}{r}-\frac{\nu'}{r^2}\right) \tag{3.3.174}$$

D'où par simplification :

$$-\chi\frac{p'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r^2}+\frac{\lambda'\nu'}{r}+\frac{2}{r^3}-\frac{\nu''}{r}+\frac{\nu'}{r^2}\right) \tag{3.3.175}$$

$$-\chi\frac{p'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - 2\frac{e^{-\lambda}}{r}\left(\frac{\lambda'}{2r}+\frac{\lambda'\nu'}{2}+\frac{1}{r^2}-\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'}{2r}\right) \tag{3.3.176}$$

$$-\chi\frac{p'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - 2\frac{e^{-\lambda}}{r}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\lambda'\nu'}{4}+\frac{\lambda'+\nu'}{2r}-\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\lambda'\nu'}{4}\right) \tag{3.3.177}$$

En combinant ce résultat avec l'expression 3.3.165, nous pouvons en déduire :

$$-\chi\frac{p'}{c^2} = -e^{-\lambda}\frac{\nu'}{2r}(\nu'+\lambda') \tag{3.3.178}$$

D'où l'expression suivante par couplage avec la relation 3.3.163 :

$$-\chi\frac{p'}{c^2} = -\frac{e^{-\lambda}}{r}(\nu'+\lambda')\frac{\nu'}{2} = \chi\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\frac{\nu'}{2} \implies \frac{p'}{c^2} = -\frac{\nu'}{2}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right) \tag{3.3.179}$$

En considérant l'expression 3.3.173, nous aboutissons alors à l'équation classique de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) ([48], (14.25c) de [1]) :

$$\frac{p'}{c^2} = -\frac{m + \frac{4\pi G p r^3}{c^4}}{r(r-2m)}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right) \tag{3.3.180}$$

Nous pouvons terminer ce calcul en obtenant la forme explicite de la métrique intérieure, toujours dans ce cadre quasi-newtonien.

En effet, en tenant compte de la relation (14.28) de [1] [37] pour $r \leq R_s$, et de la masse obtenue 3.3.171, nous pouvons déjà établir l'un des termes de la métrique à partir de 3.3.166 :

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r} = 1 - \frac{8}{3}\pi r^2 \rho \frac{G}{c^2} \implies e^{-\lambda} = 1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \tag{3.3.181}$$

37. correspondant à 6.1.2 que l'on étudiera dans la section 8

La métrique intérieure 3.3.113 peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\mathrm{d}s^2 = e^{\nu(r)}\mathrm{d}x^{02} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2\mathrm{d}\phi^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \tag{3.3.182}$$

Déterminons à présent la fonction $\nu(r)$ en sachant que la densité de l'étoile est constante par hypothèse. Nous obtenons alors d'après 3.3.179 :

$$\nu' = -\frac{2p'}{\rho c^2+p} \quad \Rightarrow \quad \nu' = -\frac{2(\rho c^2+p)'}{\rho c^2+p} = -2\ln(\rho c^2+p)' \tag{3.3.183}$$

Soit :

$$-\frac{\nu}{2} = \ln(\rho c^2+p)+C_1 \quad \Longrightarrow^{38} \quad De^{-\frac{\nu}{2}} = \frac{8\pi G}{c^2}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right) = -\chi\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right) \tag{3.3.184}$$

En considérant 3.3.163, nous pouvons résoudre cette équation de la manière suivante :

$$-\frac{\nu'+\lambda'}{r}e^{-\lambda} = \chi\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right) = -De^{-\frac{\nu}{2}} \quad \Longrightarrow \quad rDe^{-\frac{\nu}{2}} = \nu'e^{-\lambda}+\lambda'e^{-\lambda} = \nu'e^{-\lambda}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(e^{-\lambda}) \tag{3.3.185}$$

Ainsi, d'après 3.3.181, nous obtenons :

$$rDe^{-\frac{\nu}{2}} = \nu'\left(1-\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(1-\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) = \nu'\left(1-\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)+\frac{2r}{\hat{r}^2} \tag{3.3.186}$$

Or, en posant :

$$e^{\frac{\nu}{2}} = \gamma(r) \quad \Longrightarrow \quad \gamma' = \frac{\nu'}{2}e^{\frac{\nu}{2}} \tag{3.3.187}$$

D'où 3.3.186 nous permet d'obtenir :

$$rD = \nu'e^{\frac{\nu}{2}}\left(1-\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)+\frac{2r}{\hat{r}^2}e^{\frac{\nu}{2}} = 2\gamma'\left(1-\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)+\frac{2r}{\hat{r}^2}\gamma \tag{3.3.188}$$

Or, la résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre s'appuie sur la superposition des solutions. La solution générale est la somme d'une solution particulière de l'équation non homogène et de la solution générale de l'équation homogène. Cette méthode exploite la linéarité des opérateurs différentiels pour construire une solution complète qui englobe tous les comportements possibles de l'équation [39].

38. En appliquant l'exponentielle à chaque membre de l'équation, on introduit une nouvelle constante d'intégration $D = e^{C_1}$ qui doit être cohérente avec la structure des équations de champ d'Einstein pour un fluide parfait. Dans ces équations, le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ est proportionnel au tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$ selon la constante gravitationnelle d'Einstein $\frac{8\pi G}{c^4}$ reliant la courbure de l'espace-temps à la distribution de la matière. Ainsi, l'équation $De^{-\frac{\nu}{2}} = \rho c^2+p$ peut être réécrite de la manière suivante : $De^{-\frac{\nu}{2}} = \frac{8\pi G}{c^2}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)$, où D est déterminée par les conditions aux limites spécifiques pour une densité de matière ρ constante.

39. La résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre implique souvent l'utilisation de la superposition des solutions. Cette méthode repose sur le fait que les opérateurs différentiels sont linéaires, ce qui signifie que si deux fonctions f_1 et f_2 sont des solutions d'une équation différentielle linéaire, alors toute combinaison linéaire de ces fonctions af_1+bf_2 est également une solution.

Ainsi, une solution particulière de cette équation est $\gamma_p = \frac{\hat{r}^2 D}{2}$. [40]

Et la solution générale de l'équation homogène est donnée par [41] :

$$u' \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) + \frac{r}{\hat{r}^2} u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \tag{3.3.189}$$

Démonstration. Intégrons les deux membres de l'équation.

L'intégration du premier membre implique u et sa dérivée u', tandis que l'intégration du second membre s'effectue par rapport à r.

$$\int \frac{u'}{u} \, \mathrm{d}u = -\int \frac{r}{\hat{r}^2 - r^2} \, \mathrm{d}r \tag{3.3.190}$$

Ce qui donne :

$$\ln u = \frac{1}{2} \ln(\hat{r}^2 - r^2) + C_1 \tag{3.3.191}$$

D'où :

$$u = -B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \quad {}^{42} \tag{3.3.192}$$

□

La solution générale est donc donnée par :

$$\gamma = e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{\hat{r}^2 D}{2} - B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3.193}$$

Ainsi, nous obtenons la composante temporelle du tenseur métrique :

$$g_{00} = e^{\nu} = \left[A - B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \tag{3.3.194}$$

Par identification et en considérant 6.1.2, nous obtenons :

$$\frac{\hat{r}^2 D}{2} = A \Rightarrow D = 2\frac{A}{\hat{r}^2} = \frac{2\rho}{3} \frac{8\pi G}{c^2} A = -\chi \frac{2\rho}{3} A \tag{3.3.195}$$

Ainsi, en couplant 3.3.185 et 3.3.193, nous obtenons :

$$De^{-\frac{\nu}{2}} = -\chi \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = -\chi \frac{2\rho}{3} A \left[\frac{\hat{r}^2 D}{2} - B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^{-1} \tag{3.3.196}$$

40. En effet, cette solution appliquée au second membre de l'équation 3.3.188 permet d'obtenir le premier membre.

41. En posant $u = 2\gamma$

42. B est une constante d'intégration déterminée de telle sorte que la solution appliquée au premier membre de l'équation différentielle 3.3.189 permet de l'annuler.

Ce qui nous permet d'en déduire :

$$\rho + \frac{p}{c^2} = \frac{2\rho}{3} \frac{A}{\left[A - B\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]} \tag{3.3.197}$$

Or, si on considère que la pression s'annule à la surface de la sphère à $r = r_n$ [43], nous pouvons en déduire la relation suivante :

$$A = 3B\left(1 - \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \tag{3.3.198}$$

Pour déterminer B, il faut opérer un raccordement des métriques intérieures et extérieures à la surface de la sphère [44], ce que l'on peut traduire de la manière suivante en considérant 3.3.194 :

$$g_{00}^{int}(r_n) = e^{\nu(r_n)} = \left[A - B\left(1 - \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^2 = g_{00}^{ext}(r_n) = \left(1 - \frac{2GM}{r_n c^2}\right) \tag{3.3.199}$$

Ainsi, en considérant 3.3.198, nous pouvons en déduire [45] :

$$B^2\left[3\left(1 - \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^2 = \left(1 - \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right) \implies B = \frac{1}{2} \tag{3.3.200}$$

D'où nous pouvons obtenir :

$$A = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \tag{3.3.201}$$

Soit :

$$g_{00}^{int}(r) = \left[\frac{3}{2}\left(1 - \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^2 \tag{3.3.202}$$

D'où la métrique intérieure de Schwarzschild :

$$\mathrm{d}s^2 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)}\right]^2 \mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right) \tag{3.3.203}$$

Cette métrique se raccorde à la métrique extérieure de Schwarzschild :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right) \tag{3.3.204}$$

Nous pouvons ainsi en déduire selon la théorie classique de la RG, qu'une particule de matière ordinaire subira un champ gravitationnel attractif sous l'effet d'une distribution de masses positives.

43. Comme nous le verrons plus tard 8.2.9
44. Pour $r = r_n$, comme nous l'avons vu à la section 2.3.8
45. En considérant 3.3.171, 3.3.167 et 6.1.2.

Solution de la Seconde Équation de Champ 3.3.97

Considèrons l'impact de la présence des masses positives sur la géométrie de l'espace-temps structurée par $h_{\mu\nu}$ de la seconde équation de champ 3.3.97 associée à la population des masses négatives. Nous rappelons qu'on est parfaitement libre de choisir le tenseur d'interaction $T_{\mu}^{\nu(g,h)}$, dans la mesure où ce choix peut découler d'une dérivation lagrangienne.

Nous avons ainsi choisi l'expression 3.3.106, que nous pouvons définir classiquement de la manière suivante :

$$T_{\mu}^{\nu(g,h)} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{c^2} \end{pmatrix} \tag{3.3.205}$$

Nous pouvons construire les premiers membres à partir de la métrique 3.3.114, qui sont les mêmes que pour le cas précédent des masses positives [46]. Au second membre de la seconde équation de champ 3.3.97, le rapport des déterminants sera considéré quasiment unitaire dans la mesure où nous effectuons ce calcul dans l'approximation newtonienne.

Ainsi, nous obtenons :

$$\sqrt{\frac{|g|}{|h|}} = \sqrt{\frac{e^{\nu} e^{\lambda} r^4 \sin^2\theta}{e^{\bar{\nu}} e^{\bar{\lambda}} r^4 \sin^2\theta}} \approx 1 \tag{3.3.206}$$

Soit :

$$e^{-\bar{\lambda}}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\lambda}'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = -\chi\rho \tag{3.3.207}$$

$$e^{-\bar{\lambda}}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\bar{\nu}'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = -\chi\frac{p}{c^2} \tag{3.3.208}$$

$$e^{-\bar{\lambda}}\left(\frac{\bar{\nu}''}{2} - \frac{\bar{\nu}'\bar{\lambda}'}{4} + \frac{\bar{\nu}'^2}{4} + \frac{\bar{\nu}' - \bar{\lambda}'}{2r}\right) = -\chi\frac{p}{c^2} \tag{3.3.209}$$

$$-\frac{\bar{\nu}' + \bar{\lambda}'}{r} e^{-\bar{\lambda}} = -\chi\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right) \tag{3.3.210}$$

D'où :

$$e^{\bar{\lambda}}\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\nu}'^2}{4} + \frac{\bar{\nu}'\bar{\lambda}'}{4} + \frac{\bar{\nu}' + \bar{\lambda}'}{2r} - \frac{\bar{\nu}''}{2} \tag{3.3.211}$$

46. Pour simplifier l'écriture, les exposants (g) et (h) ne seront pas pris en compte dans toute la démonstration. Étant donné que la source du champ gravitationnel de la seconde équation de champ 3.3.97 est créée par une masse positive, nous conserverons la forme classique des variables ρ, c et p au second membre. En revanche, le premier membre de cette équation décrit la géométrie induite par cette source sur les géodésiques parcourues par des masses négatives. Nous utiliserons donc les notations $\bar{\lambda}$, $\bar{\nu}$ au premier membre pour représenter ce phénomène physique.

Pour résoudre ces équations différentielles, nous pouvons procéder de manière similaire au cas précédent en posant :

$$e^{-\bar{\lambda}} = 1 - \frac{2\bar{m}(r)}{r} \implies 2\bar{m}(r) = r\left(1 - e^{-\bar{\lambda}}\right) \tag{3.3.212}$$

D'où :

$$-\frac{2\bar{m}'}{r^2} = -\frac{1}{r^2} + e^{-\bar{\lambda}}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\lambda}'}{r}\right) \tag{3.3.213}$$

$$\tag{3.3.214}$$

Or, de manière similaire à l'équation (14.18) de [1], nous pouvons écrire :

$$\bar{m}' = -\frac{4\pi r^2 G}{c^2}\rho \implies \bar{m}(r) = -\frac{G\rho}{c^2}\int_0^r 4\pi r^2 \mathrm{d}r = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{G}{c^2} = -m(r) \tag{3.3.215}$$

L'expression 3.3.208 nous permet ainsi d'obtenir :

$$\bar{\nu}' = 2\frac{-m + \frac{4\pi G p r^3}{c^4}}{r(r+2m)} \tag{3.3.216}$$

Or, en procédant à la dérivation de l'expression 3.3.208, nous obtenons :

$$-\chi\frac{p'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - \bar{\lambda}' e^{-\bar{\lambda}}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\bar{\nu}'}{r}\right) + e^{-\bar{\lambda}}\left(\frac{-2}{r^3} + \frac{\bar{\nu}''}{r} - \frac{\bar{\nu}'}{r^2}\right) \tag{3.3.217}$$

D'où par simplification :

$$-\chi\frac{p'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - e^{-\bar{\lambda}}\left(\frac{\bar{\lambda}'}{r^2} + \frac{\bar{\lambda}'\bar{\nu}'}{r} + \frac{2}{r^3} - \frac{\bar{\nu}''}{r} + \frac{\bar{\nu}'}{r^2}\right) \tag{3.3.218}$$

$$-\chi\frac{p'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - 2\frac{e^{-\bar{\lambda}}}{r}\left(\frac{\bar{\lambda}'}{2r} + \frac{\bar{\lambda}'\bar{\nu}'}{2} + \frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\nu}''}{2} + \frac{\bar{\nu}'}{2r}\right) \tag{3.3.219}$$

$$-\chi\frac{p'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - 2\frac{e^{-\bar{\lambda}}}{r}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\nu}'^2}{4} + \frac{\bar{\lambda}'\bar{\nu}'}{4} + \frac{\bar{\lambda}' + \bar{\nu}'}{2r} - \frac{\bar{\nu}''}{2} + \frac{\bar{\nu}'^2}{4} + \frac{\bar{\lambda}'\bar{\nu}'}{4}\right) \tag{3.3.220}$$

En combinant ce résultat avec l'expression 3.3.211, nous pouvons en déduire :

$$-\chi\frac{p'}{c^2} = -e^{-\bar{\lambda}}\frac{\bar{\nu}'}{2r}(\bar{\nu}' + \bar{\lambda}') \tag{3.3.221}$$

D'où l'expression suivante par couplage avec la relation 3.3.210 :

$$-\chi\frac{p'}{c^2} = -\frac{e^{-\bar{\lambda}}}{r}(\bar{\nu}' + \bar{\lambda}')\frac{\bar{\nu}'}{2} = -\chi\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right)\frac{\bar{\nu}'}{2} \implies \frac{p'}{c^2} = \frac{\bar{\nu}'}{2}\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right) \tag{3.3.222}$$

En considérant l'expression 3.3.216, nous aboutissons alors à la solution de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) pour la population des masses négatives :

$$\frac{p'}{c^2} = -\frac{m - \frac{4\pi G p r^3}{c^4}}{r(r+2m)}\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right) \tag{3.3.223}$$

Les deux solutions 3.3.180 et 3.3.223 tendent vers l'équation d'Euler dans l'approximation newtonienne. Cela correspond également à la satisfaction asymptotique des identités de Bianchi dans ce même contexte [47].

Nous allons à présent établir la métrique intérieure de Schwarzschild associée à la population des masses négatives en appliquant le même schéma de calcul que pour la population des masses positives, ce qui constitue alors la solution de la seconde équation de champ 3.3.97.

En effet, en tenant compte de la relation (14.28) de [1] pour $r \leq R_s$ et de 3.3.212, nous pouvons établir la relation suivante :

$$e^{-\bar{\lambda}} = 1 - \frac{2\bar{m}(r)}{r} \implies e^{-\bar{\lambda}} = 1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \tag{3.3.224}$$

La métrique intérieure 3.3.114 peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\bar{\mathrm{d}s}^2 = e^{\bar{\nu}(r)}\mathrm{d}x^{0 2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1+\frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2\mathrm{d}\phi^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \tag{3.3.225}$$

Déterminons à présent la fonction $\bar{\nu}(r)$ en sachant que la densité de l'étoile est constante par hypothèse. Nous obtenons alors d'après 3.3.222 :

$$\bar{\nu}' = -\frac{2p'}{-\rho c^2 + p} \quad \Rightarrow \quad \bar{\nu}' = -\frac{2(\rho c^2 - p)'}{\rho c^2 - p} = -2\ln(\rho c^2 - p)' \tag{3.3.226}$$

Soit :

$$-\frac{\bar{\nu}}{2} = \ln(\rho c^2 - p) + C_2 \quad \implies \quad \bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} = -\chi\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right) \tag{3.3.227}$$

En considérant 3.3.210, nous pouvons résoudre cette équation de la manière suivante :

$$-\frac{\bar{\nu}' + \bar{\lambda}'}{r}e^{-\bar{\lambda}} = -\chi\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right) = \bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} \quad \implies \quad -r\bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} = \bar{\nu}'e^{-\bar{\lambda}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(e^{-\bar{\lambda}}) \tag{3.3.228}$$

Ainsi, d'après 3.3.224, nous obtenons :

$$-r\bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} = \bar{\nu}'\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) = \bar{\nu}'\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) - \frac{2r}{\hat{r}^2} \tag{3.3.229}$$

Or, en posant :

$$e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} = \bar{\gamma}(r) \quad \implies \quad \bar{\gamma}' = \frac{\bar{\nu}'}{2}e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} \tag{3.3.230}$$

D'où 3.3.229 nous permet d'obtenir :

$$-r\bar{D} = \bar{\nu}'e^{\frac{\bar{\nu}}{2}}\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) - \frac{2r}{\hat{r}^2}e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} = 2\bar{\gamma}'\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) - \frac{2r}{\hat{r}^2}\bar{\gamma} \tag{3.3.231}$$

47. L'inégalité $r \gg 2m$ (où m est souvent remplacé par $\frac{GM}{c^2}$ (3.3.167) pour obtenir une dimension de longueur, M étant la masse de l'objet et G la constante gravitationnelle) indique que l'on est suffisamment loin de la source gravitationnelle pour que les effets de la relativité générale soient négligeables. En effet, à de grandes distances, la longueur $\frac{2GM}{c^2}$ est totalement négligeable.

Une solution particulière de cette équation est $\bar{\gamma}_p = \frac{\hat{r}^2 \bar{D}}{2}$.

Et la solution générale de l'équation homogène est donnée par [48] :

$$\bar{u}' \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) - \frac{r}{\hat{r}^2}\bar{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u} = \bar{B}\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \tag{3.3.232}$$

D'où la solution générale :

$$\bar{\gamma} = e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} = \frac{\hat{r}^2 \bar{D}}{2} + \bar{B}\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3.233}$$

Ainsi, nous obtenons la composante temporelle du tenseur métrique :

$$\bar{g}_{00} = e^{\bar{\nu}} = \left[\bar{A} + \bar{B}\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \tag{3.3.234}$$

Par identification et en considérant 6.1.2, nous obtenons :

$$\frac{\hat{r}^2 \bar{D}}{2} = \bar{A} \Rightarrow \bar{D} = 2\frac{\bar{A}}{\hat{r}^2} = \frac{2\rho}{3}\frac{8\pi G}{c^2}\bar{A} = -\chi\frac{2\rho}{3}\bar{A} \tag{3.3.235}$$

Ainsi, en couplant 3.3.228 et 3.3.233, nous obtenons :

$$\bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} = -\chi\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right) = -\chi\frac{2\rho}{3}\bar{A}\left[\frac{\hat{r}^2\bar{D}}{2} + \bar{B}\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^{-1} \tag{3.3.236}$$

Ce qui nous permet d'en déduire :

$$\rho - \frac{p}{c^2} = \frac{2\rho}{3}\frac{\bar{A}}{\left[\bar{A} + \bar{B}\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]} \tag{3.3.237}$$

Or, si on considère que la pression s'annule à la surface de la sphère à $r = r_n$, nous pouvons en déduire la relation suivante :

$$\bar{A} = -3\bar{B}\left(1 + \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \tag{3.3.238}$$

Pour déterminer $\bar{B}$, il faut opérer un raccordement des métriques intérieures et extérieures à la surface de la sphère, ce que l'on peut traduire de la manière suivante en considérant 3.3.234 :

$$\bar{g}_{00}^{int}(r_n) = e^{\bar{\nu}(r_n)} = \left[\bar{A} + \bar{B}\left(1 + \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^2 = \bar{g}_{00}^{ext}(r_n) = \left(1 + \frac{2GM}{r_n c^2}\right) \tag{3.3.239}$$

Ainsi, en tenant compte de l'expression 3.3.238, nous pouvons en déduire :

$$\left[-3\bar{B}\left(1 + \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} + \bar{B}\left(1 + \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^2 = \left(1 + \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right) \implies B = \frac{1}{2} \tag{3.3.240}$$

48. En posant $\bar{u} = 2\bar{\gamma}$

D'où nous pouvons obtenir :

$$\bar{A} = -\frac{3}{2}\left(1 + \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \tag{3.3.241}$$

Soit :

$$\bar{g}_{00}^{int}(r) = \left[-\frac{3}{2}\left(1 + \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^2 \tag{3.3.242}$$

D'où la métrique intérieure de Schwarzschild :

$$\bar{\mathrm{d}s}^2 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)}\right]^2 \mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right) \tag{3.3.243}$$

Cette métrique se raccorde à la métrique extérieure de Schwarzschild :

$$\bar{\mathrm{d}s}^2 = \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 + \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right) \tag{3.3.244}$$

Nous pouvons en déduire qu'une particule de masse négative subira un champ gravitationnel répulsif sous l'effet d'une distribution de masses positives.

Ainsi, la forme générale est donnée par :

$$\mathrm{d}s^{(f)^2} = \left[\frac{3}{2}\sqrt{\left(1 - \varepsilon\frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 - \varepsilon\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)}\right]^2 \mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \varepsilon\frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right) \tag{3.3.245}$$

Avec $\varepsilon = 1$ pour représenter des masses de même signe qui s'attirent, et $\varepsilon = -1$ pour des masses de signes opposés qui se repoussent.

Le paradigme de la Relativité Générale (RG) peut être résumé de la manière suivante :

> *L'univers est une variété M_4, équipée d'une métrique, solution de l'équation de champ d'Einstein 2.3.1.*

Le modèle Janus est une extension de la RG :

> *L'univers est une variété M_4, équipée de deux métriques, solutions du système d'équations de champ couplées 3.3.54 et 3.3.55.*

Dans ces conditions, la RG représente une approximation de ce modèle, dans les régions où la masse négative peut être négligée, par exemple au voisinage du Soleil. C'est évidemment une proposition extrêmement ambitieuse, qui nécessite des confirmations observationnelles pour être crédible.

3.3.8 Compatibilité des Équations de Champ au voisinage du Répulseur du Dipôle

Considérons à présent les régions où les masses négatives dominent, par exemple, au voisinage du Répulseur du Dipôle. Nous pouvons déterminer la solution de chacune des équations de champ 3.3.100 et 3.3.101.

Solution de la première Équation de Champ 3.3.100

Considèrons l'impact de la présence des masses négatives sur la géométrie de l'espace-temps structurée par $g_{\mu\nu}$ de la première équation de champ 3.3.100 associée à la population des masses positives. Comme nous l'avons déjà évoqué, nous pouvons choisir le tenseur d'interaction $T_\mu^{\nu(h,g)}$ de la manière suivante, dans la mesure où ce choix peut découler d'une dérivation lagrangienne[49] :

$$T_\mu^{\nu(h,g)} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} \end{pmatrix} \tag{3.3.246}$$

Nous pouvons construire les premiers membres à partir de la métrique 3.3.113, qui sont les mêmes que pour les cas précédents. Au second membre de la première équation de champ 3.3.100, le rapport des déterminants sera considéré quasiment unitaire.

Ainsi, nous obtenons :

$$\sqrt{\frac{|h|}{|g|}} = \sqrt{\frac{e^{\bar{\nu}} e^{\bar{\lambda}} r^4 \sin^2\theta}{e^{\nu} e^{\lambda} r^4 \sin^2\theta}} \approx 1 \tag{3.3.247}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = -\chi\bar{\rho} \tag{3.3.248}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = -\chi\frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} \tag{3.3.249}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r}\right) = -\chi\frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} \tag{3.3.250}$$

$$-\frac{\nu' + \lambda'}{r} e^{-\lambda} = -\chi\left(\bar{\rho} - \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right) \tag{3.3.251}$$

D'où :

$$e^{\lambda}\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu' + \lambda'}{2r} - \frac{\nu''}{2} \tag{3.3.252}$$

49. Pour simplifier l'écriture, les exposants (g) et (h) ne seront pas pris en compte dans toute la démonstration. Étant donné que la source du champ gravitationnel de la première équation de champ 3.3.100 est créée par une masse négative, nous utiliserons les notations $\bar{\rho}$, $\bar{c}$ et $\bar{p}$ au second membre pour représenter ce phénomène physique. En revanche, le premier membre de cette équation décrit la géométrie induite par cette source sur les géodésiques parcourues par des masses positives. Nous conserverons donc la forme classique des variables λ et ν au premier membre.

Pour résoudre ces équations différentielles, nous pouvons procéder de manière similaire à l'étude précédente :

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \implies 2m(r) = r\left(1 - e^{-\lambda}\right) \quad \text{avec} \quad m = \frac{GM}{c^2} \tag{3.3.253}$$

D'où :

$$-\frac{2m'}{r^2} = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) \tag{3.3.254}$$

$$\tag{3.3.255}$$

Or, de manière similaire à l'équation (14.18) de [1], nous pouvons écrire :

$$m' = \frac{4\pi r^2 G}{c^2}\rho \implies m(r) = \frac{G\rho}{c^2}\int_0^r 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{G}{c^2} \tag{3.3.256}$$

L'expression 3.3.249 couplée à l'expression 3.3.253 nous permet ainsi d'obtenir :

$$\nu' = 2\frac{-m + \frac{4\pi G\bar{p}r^3}{\bar{c}^4}}{r(r+2m)} \tag{3.3.257}$$

Or, en procédant à la dérivation de l'expression 3.3.249, nous obtenons :

$$-\chi\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2} = \frac{2}{r^3} - \lambda' e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) + e^{-\lambda}\left(\frac{-2}{r^3} + \frac{\nu''}{r} - \frac{\nu'}{r^2}\right) \tag{3.3.258}$$

D'où par simplification :

$$-\chi\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2} = \frac{2}{r^3} - e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r^2} + \frac{\lambda'\nu'}{r} + \frac{2}{r^3} - \frac{\nu''}{r} + \frac{\nu'}{r^2}\right) \tag{3.3.259}$$

$$-\chi\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2} = \frac{2}{r^3} - 2\frac{e^{-\lambda}}{r}\left(\frac{\lambda'}{2r} + \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{1}{r^2} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{2r}\right) \tag{3.3.260}$$

$$-\chi\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2} = \frac{2}{r^3} - 2\frac{e^{-\lambda}}{r}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda'+\nu'}{2r} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4}\right) \tag{3.3.261}$$

En combinant ce résultat avec l'expression 3.3.252, nous pouvons en déduire :

$$-\chi\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2} = -e^{-\lambda}\frac{\nu'}{2r}(\nu' + \lambda') \tag{3.3.262}$$

D'où l'expression suivante par couplage avec la relation 3.3.251 :

$$-\chi\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2} = -\frac{e^{-\lambda}}{r}(\nu' + \lambda')\frac{\nu'}{2} = -\chi\left(\bar{\rho} - \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right)\frac{\nu'}{2} \implies \frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2} = \frac{\nu'}{2}\left(\bar{\rho} - \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right) \tag{3.3.263}$$

En considérant l'expression 3.3.257, nous aboutissons alors à la solution de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) pour la population des masses positives [50] :

$$\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2} = -\frac{m - \frac{4\pi G\bar{p}r^3}{\bar{c}^4}}{r(r+2m)}\left(\bar{\rho} - \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right) \tag{3.3.264}$$

50. L'impact du gradient de pression des masses négatives sur les géodésiques parcourues par la matière ordinaire et les photons d'énergie positive

Nous allons à présent établir la métrique intérieure de Schwarzschild solution de la première équation de champ 3.3.100.

En effet, en tenant compte de la relation (14.28) de [1] pour $r \leq R_s$ et de 3.3.253, nous pouvons établir la relation suivante :

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \implies e^{-\lambda} = 1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \tag{3.3.265}$$

La métrique intérieure 3.3.113 peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\mathrm{d}s^2 = e^{\nu(r)}\mathrm{d}x^{0\,2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1+\frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2\mathrm{d}\phi^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \tag{3.3.266}$$

Déterminons à présent la fonction $\nu(r)$ en sachant que la densité de la sphère est constante par hypothèse. Nous obtenons alors d'après 3.3.222 :

$$\nu' = -\frac{2\bar{p}'}{-\bar{\rho}\bar{c}^2 + \bar{p}} \quad \Rightarrow \quad \nu' = -\frac{2(\bar{\rho}\bar{c}^2 - \bar{p})'}{\bar{\rho}\bar{c}^2 - \bar{p}} = -2\ln(\bar{\rho}\bar{c}^2 - \bar{p})' \tag{3.3.267}$$

Soit :

$$-\frac{\nu}{2} = \ln(\bar{\rho}\bar{c}^2 - \bar{p}) + C_2 \quad \implies \quad De^{-\frac{\nu}{2}} = -\chi\left(\bar{\rho} - \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right) \tag{3.3.268}$$

En considérant 3.3.251, nous pouvons résoudre cette équation de la manière suivante :

$$-\frac{\nu' + \lambda'}{r}e^{-\lambda} = -\chi\left(\bar{\rho} - \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right) = De^{-\frac{\nu}{2}} \quad \implies \quad -rDe^{-\frac{\nu}{2}} = \nu' e^{-\lambda} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(e^{-\lambda}) \tag{3.3.269}$$

Ainsi, d'après 3.3.265, nous obtenons :

$$-rDe^{-\frac{\nu}{2}} = \nu'\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) = \nu'\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) - \frac{2r}{\hat{r}^2} \tag{3.3.270}$$

Or, en posant :

$$e^{\frac{\nu}{2}} = \gamma(r) \quad \implies \quad \gamma' = \frac{\nu'}{2}e^{\frac{\nu}{2}} \tag{3.3.271}$$

D'où 3.3.270 nous permet d'obtenir :

$$-rD = \nu' e^{\frac{\nu}{2}}\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) - \frac{2r}{\hat{r}^2}e^{\frac{\nu}{2}} = 2\gamma'\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) - \frac{2r}{\hat{r}^2}\gamma \tag{3.3.272}$$

Une solution particulière de cette équation est $\gamma_p = \frac{\hat{r}^2 D}{2}$.

Et la solution générale de l'équation homogène est donnée par [51] :

$$u'\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) - \frac{r}{\hat{r}^2}u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = B\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \tag{3.3.273}$$

51. En posant $u = 2\gamma$

D'où la solution générale :

$$\gamma = e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{\hat{r}^2 D}{2} + B\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3.274}$$

Ainsi, nous obtenons la composante temporelle du tenseur métrique :

$$g_{00} = e^{\nu} = \left[A + B\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \tag{3.3.275}$$

Par identification et en considérant 6.1.2, nous obtenons :

$$\frac{\hat{r}^2 D}{2} = A \Rightarrow D = 2\frac{A}{\hat{r}^2} = \frac{2\bar{\rho}}{3}\frac{8\pi G}{\bar{c}^2}A = -\chi\frac{2\bar{\rho}}{3}A \tag{3.3.276}$$

Ainsi, en couplant 3.3.269 et 3.3.274, nous obtenons :

$$De^{-\frac{\nu}{2}} = -\chi\left(\bar{\rho} - \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right) = -\chi\frac{2\bar{\rho}}{3}A\left[\frac{\hat{r}^2 D}{2} + B\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^{-1} \tag{3.3.277}$$

Ce qui nous permet d'en déduire :

$$\bar{\rho} - \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} = \frac{2\bar{\rho}}{3}\frac{A}{\left[A + B\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]} \tag{3.3.278}$$

Or, si on considère que la pression s'annule à la surface de la sphère à $r = r_n$, nous pouvons en déduire la relation suivante :

$$A = -3B\left(1 + \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \tag{3.3.279}$$

Pour déterminer B, il faut opérer un raccordement des métriques intérieures et extérieures à la surface de la sphère, ce que l'on peut traduire de la manière suivante en considérant 3.3.275 :

$$g_{00}^{int}(r_n) = e^{\nu(r_n)} = \left[A + B\left(1 + \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^2 = g_{00}^{ext}(r_n) = \left(1 + \frac{2GM}{r_n c^2}\right) \tag{3.3.280}$$

Ainsi, en tenant compte de l'expression 3.3.279, nous pouvons en déduire :

$$\left[-3B\left(1 + \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} + B\left(1 + \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^2 = \left(1 + \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right) \implies B = \frac{1}{2} \tag{3.3.281}$$

D'où nous pouvons obtenir :

$$A = -\frac{3}{2}\left(1 + \frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \tag{3.3.282}$$

Soit :

$$g_{00}^{int}(r) = \left[-\frac{3}{2}\left(1+\frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^2 \tag{3.3.283}$$

D'où la solution métrique intérieure de Schwarzschild :

$$\mathrm{d}s^2 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{\left(1+\frac{{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)}\right]^2 \mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1+\frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right) \tag{3.3.284}$$

Cette métrique se raccorde à la métrique extérieure de Schwarzschild :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1+\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2\mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1+\frac{2GM}{c^2r}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right) \tag{3.3.285}$$

Nous pouvons en déduire qu'une particule de matière ordinaire subira un champ gravitationnel répulsif sous l'effet d'une distribution de masses négatives.

Solution de la seconde Équation de Champ 3.3.101

Ici, la source du champ gravitationnel de la seconde équation de champ 3.3.101 est créée par une masse négative. Nous adopterons donc la même forme des variables $\bar{\rho}$, $\bar{c}$ et $\bar{p}$ au second membre. Le premier membre de cette équation décrivant la géométrie induite par cette source sur les géodésiques parcourues par des masses négatives, nous utiliserons également les notations $\bar{\lambda}$, $\bar{\nu}$ au premier membre pour représenter ce phénomène physique.

Examinons la construction classique de la métrique intérieure en partant de l'expression du tenseur énergie-impulsion $T_\mu^{\nu(h,h)}$ de la seconde équation de champ 3.3.101 associée à la population des masses négatives que nous sommes parfaitement libre de définir de la manière suivante :

$$T_\mu^{\nu(h,h)} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} \end{pmatrix} \tag{3.3.286}$$

Ainsi, nous pouvons poser les équations différentielles suivantes :

$$e^{-\bar{\lambda}}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\lambda}'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = \chi\bar{\rho} \tag{3.3.287}$$

$$e^{-\bar{\lambda}}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\bar{\nu}'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = -\chi\frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} \tag{3.3.288}$$

$$e^{-\bar{\lambda}}\left(\frac{\bar{\nu}''}{2} - \frac{\bar{\nu}'\bar{\lambda}'}{4} + \frac{\bar{\nu}'^2}{4} + \frac{\bar{\nu}' - \bar{\lambda}'}{2r}\right) = -\chi\frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} \tag{3.3.289}$$

$$-\frac{\bar{\nu}' + \bar{\lambda}'}{r}e^{-\bar{\lambda}} = \chi\left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right) \tag{3.3.290}$$

D'où :

$$e^{-\bar{\lambda}}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\bar{\lambda}'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}=e^{-\bar{\lambda}}\left[\frac{\bar{\nu}''}{2}-\frac{\bar{\nu}'\bar{\lambda}'}{4}+\frac{\bar{\nu}'^2}{4}+\frac{\bar{\nu}'-\bar{\lambda}'}{2r}\right] \tag{3.3.291}$$

$$e^{\bar{\lambda}}\frac{1}{r^2}=\frac{1}{r^2}-\frac{\bar{\nu}'^2}{4}+\frac{\bar{\nu}'\bar{\lambda}'}{4}+\frac{\bar{\nu}'+\bar{\lambda}'}{2r}-\frac{\bar{\nu}''}{2} \tag{3.3.292}$$

Pour résoudre ces équations différentielles, nous pouvons procéder de manière similaire à l'expression (14.15) de la référence [1] du chapitre 14 en posant :

$$e^{-\bar{\lambda}}=1-\frac{2\bar{m}(r)}{r}\implies 2\bar{m}(r)=r\left(1-e^{-\bar{\lambda}}\right) \tag{3.3.293}$$

En considérant 3.3.287, si nous dérivons cette expression, nous obtenons :

$$2\bar{m}'=\left(1-e^{-\bar{\lambda}}\right)+r\bar{\lambda}'e^{-\bar{\lambda}} \tag{3.3.294}$$

$$-\frac{2\bar{m}'}{r^2}=\frac{-1+e^{-\bar{\lambda}}-r\bar{\lambda}'e^{-\bar{\lambda}}}{r^2}=-\frac{1}{r^2}+e^{-\bar{\lambda}}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\bar{\lambda}'}{r}\right) \tag{3.3.295}$$

$$\bar{m}'=-\frac{r^2\chi\bar{\rho}}{2}=\frac{4\pi r^2G}{\bar{c}^2}\bar{\rho} \tag{3.3.296}$$

De manière similaire à l'équation (14.18) de [1], nous pouvons en déduire :

$$\bar{m}(r)=\frac{G\bar{\rho}}{\bar{c}^2}\int_0^r 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\pi r^3\bar{\rho}\frac{G}{\bar{c}^2} \tag{3.3.297}$$

L'expression 3.3.288 couplée à l'expression 3.3.293 nous permet d'obtenir :

$$\bar{\nu}'=\frac{r}{r(r-2\bar{m})}\left(-\chi\frac{\bar{p}r^2}{\bar{c}^2}+1\right)-\frac{(r-2\bar{m})}{r(r-2\bar{m})} \tag{3.3.298}$$

D'où :

$$\bar{\nu}'=2\frac{\bar{m}+\frac{4\pi G\bar{p}r^3}{\bar{c}^4}}{r(r-2\bar{m})} \tag{3.3.299}$$

Or, en procédant à la dérivation de l'expression 3.3.288, nous obtenons :

$$-\chi\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2}=\frac{2}{r^3}-\bar{\lambda}'e^{-\bar{\lambda}}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\bar{\nu}'}{r}\right)+e^{-\bar{\lambda}}\left(\frac{-2}{r^3}+\frac{\bar{\nu}''}{r}-\frac{\bar{\nu}'}{r^2}\right) \tag{3.3.300}$$

D'où par simplification :

$$-\chi\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2}=\frac{2}{r^3}-e^{-\bar{\lambda}}\left(\frac{\bar{\lambda}'}{r^2}+\frac{\bar{\lambda}'\bar{\nu}'}{r}+\frac{2}{r^3}-\frac{\bar{\nu}''}{r}+\frac{\bar{\nu}'}{r^2}\right) \tag{3.3.301}$$

$$-\chi\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2}=\frac{2}{r^3}-2\frac{e^{-\bar{\lambda}}}{r}\left(\frac{\bar{\lambda}'}{2r}+\frac{\bar{\lambda}'\bar{\nu}'}{2}+\frac{1}{r^2}-\frac{\bar{\nu}''}{2}+\frac{\bar{\nu}'}{2r}\right) \tag{3.3.302}$$

$$-\chi\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2}=\frac{2}{r^3}-2\frac{e^{-\bar{\lambda}}}{r}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\bar{\nu}'^2}{4}+\frac{\bar{\lambda}'\bar{\nu}'}{4}+\frac{\bar{\lambda}'+\bar{\nu}'}{2r}-\frac{\bar{\nu}''}{2}+\frac{\bar{\nu}'^2}{4}+\frac{\bar{\lambda}'\bar{\nu}'}{4}\right) \tag{3.3.303}$$

En combinant ce résultat avec l'expression 3.3.292, nous pouvons en déduire :

$$-\chi\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2} = -e^{-\bar{\lambda}}\frac{\bar{\nu}'}{2r}(\bar{\nu}' + \bar{\lambda}') \tag{3.3.304}$$

D'où l'expression suivante par couplage avec la relation 3.3.290 :

$$-\chi\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2} = -\frac{e^{-\bar{\lambda}}}{r}(\bar{\nu}' + \bar{\lambda}')\frac{\bar{\nu}'}{2} = \chi\left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right)\frac{\bar{\nu}'}{2} \implies \frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2} = -\frac{\bar{\nu}'}{2}\left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right) \tag{3.3.305}$$

En considérant l'expression 3.3.299, nous pouvons en déduire l'équation classique de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) :

$$\frac{\bar{p}'}{\bar{c}^2} = -\frac{\bar{m} + \frac{4\pi G\bar{p}r^3}{\bar{c}^4}}{r(r - 2\bar{m})}\left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right) \tag{3.3.306}$$

Les deux solutions 3.3.264 et 3.3.306 tendent vers l'équation d'Euler dans l'approximation newtonienne. La compatibilité des deux équations de champ est assurée de manière asymptotique.

La forme du tenseur d'interaction 3.3.246 et du tenseur énergie-impulsion 3.3.286 permet de satisfaire les conditions de Bianchi. Ceci ne serait évidemment plus le cas si la masse négative sortait de ce cadre. Pour cela, il faudrait qu'il existe des étoiles à neutrons de masse négative. Or, le temps caractéristique d'évolution des conglomérats de masse négative [52], dépasse l'âge de l'univers. Ces conglomérats sphéroïdaux ne pouvant évoluer, le contenu de cet espace-temps négatif se limitera à un mélange d'anti-hydrogène et d'anti-hélium de masse négative. La nucléosynthèse ne pouvant se produire, il ne peut donc y avoir ni anti-galaxies, ni anti-étoiles, quelles que soient leur masse. Par conséquent, il ne peut exister d'anti-étoiles à neutrons [53].

Par ailleurs, dans le cas où cet espace-temps négatif engendrerait des astres hyperdenses par un mécanisme encore inconnu, il serait alors nécessaire de reconsidérer la forme de ces tenseurs. Cependant, la configuration actuelle satisfait à toutes les données observationnelles actuellement et potentiellement disponibles.

Les photons d'énergie positive, émis par les sources situées derrière le Répulseur du Dipôle, subiront une diminution significative de leur magnitude en raison de l'effet de lentille gravitationnelle négative. Ces photons traversent alors librement ce grand vide. L'effet sera maximal lorsque les photons frôlent ce conglomérat sphéroïdal, où l'intégralité de la masse doit être prise en compte. En revanche, il sera négligeable lorsque ces photons traversent le voisinage central (Figure 3.16).

Ainsi, nous prédisons que lorsqu'une cartographie sera établie par le télescope JWST, la masse invisible manifestera sa présence par une atténuation de luminosité, non pas sur l'ensemble d'un disque, mais selon un anneau.

52. leur "cooling time"
53. Consulter la section Nature de l'antimatière primordiale

Déterminons maintenant la forme explicite de la métrique intérieure.

En tenant compte de la relation (14.28) de [1] pour $r \leq R_s$, nous pouvons établir l'un des termes de la métrique à partir de 3.3.293 :

$$e^{-\bar{\lambda}} = 1 - \frac{2\bar{m}(r)}{r} = 1 - \frac{8}{3}\pi r^2 \bar{\rho}\frac{G}{\bar{c}^2} \implies e^{-\bar{\lambda}} = 1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \tag{3.3.307}$$

La métrique intérieure 3.3.114 peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\bar{\mathrm{d}s}^2 = e^{\bar{\nu}(r)}\mathrm{d}x^{02} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2\mathrm{d}\phi^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \tag{3.3.308}$$

Déterminons à présent la fonction $\bar{\nu}(r)$ en sachant que la densité de la sphère est constante par hypothèse. Nous obtenons alors d'après 3.3.305 :

$$\bar{\nu}' = -\frac{2\bar{p}'}{\bar{\rho}\bar{c}^2 + \bar{p}} \quad \Rightarrow \quad \bar{\nu}' = -\frac{2(\bar{\rho}\bar{c}^2 + \bar{p})'}{\bar{\rho}\bar{c}^2 + \bar{p}} = -2\ln(\bar{\rho}\bar{c}^2 + \bar{p})' \tag{3.3.309}$$

Soit :

$$-\frac{\bar{\nu}}{2} = \ln(\bar{\rho}\bar{c}^2 + \bar{p}) + C_1 \quad \implies \quad \bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} = \frac{8\pi G}{\bar{c}^2}\left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right) = -\chi\left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right) \tag{3.3.310}$$

En considérant 3.3.290, nous pouvons résoudre cette équation de la manière suivante :

$$-\frac{\bar{\nu}' + \bar{\lambda}'}{r}e^{-\bar{\lambda}} = \chi\left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right) = -\bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} \implies r\bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} = \bar{\nu}'e^{-\bar{\lambda}} + \bar{\lambda}'e^{-\bar{\lambda}} = \bar{\nu}'e^{-\bar{\lambda}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(e^{-\bar{\lambda}}) \tag{3.3.311}$$

Ainsi, d'après 3.3.307, nous obtenons :

$$r\bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} = \bar{\nu}'\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) = \bar{\nu}'\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) + \frac{2r}{\hat{r}^2} \tag{3.3.312}$$

Or, en posant :

$$e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} = \bar{\gamma}(r) \implies \bar{\gamma}' = \frac{\bar{\nu}'}{2}e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} \tag{3.3.313}$$

D'où 3.3.312 nous permet d'obtenir :

$$r\bar{D} = \bar{\nu}'e^{\frac{\bar{\nu}}{2}}\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) + \frac{2r}{\hat{r}^2}e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} = 2\bar{\gamma}'\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) + \frac{2r}{\hat{r}^2}\bar{\gamma} \tag{3.3.314}$$

Une solution particulière de cette équation est $\bar{\gamma}_p = \frac{\hat{r}^2\bar{D}}{2}$.[54]

Et la solution générale de l'équation homogène est donnée par[55] :

$$\bar{u}'\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) + \frac{r}{\hat{r}^2}\bar{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u} = -\bar{B}\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \tag{3.3.315}$$

54. En effet, cette solution appliquée au second membre de l'équation 3.3.314 permet d'obtenir le premier membre.

55. En posant $\bar{u} = 2\bar{\gamma}$

La solution générale est donc donnée par :

$$\bar{\gamma} = e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} = \frac{\hat{r}^2 \bar{D}}{2} - \bar{B}\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3.316}$$

Ainsi, nous obtenons la composante temporelle du tenseur métrique :

$$\bar{g}_{00} = e^{\bar{\nu}} = \left[\bar{A} - \bar{B}\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \tag{3.3.317}$$

Par identification et en considérant 6.1.2, nous obtenons :

$$\frac{\hat{r}^2 \bar{D}}{2} = \bar{A} \Rightarrow \bar{D} = 2\frac{\bar{A}}{\hat{r}^2} = \frac{2\bar{\rho}}{3}\frac{8\pi G}{\bar{c}^2}\bar{A} = -\chi\frac{2\bar{\rho}}{3}\bar{A} \tag{3.3.318}$$

Ainsi, en couplant 3.3.311 et 3.3.316, nous obtenons :

$$\bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} = -\chi\left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2}\right) = -\chi\frac{2\bar{\rho}}{3}\bar{A}\left[\frac{\hat{r}^2\bar{D}}{2} - \bar{B}\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^{-1} \tag{3.3.319}$$

Ce qui nous permet d'en déduire :

$$\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} = \frac{2\bar{\rho}}{3}\frac{\bar{A}}{\left[\bar{A} - \bar{B}\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]} \tag{3.3.320}$$

Or, si on considère que la pression s'annule à la surface de la sphère à $r = \bar{r_n}$, nous pouvons en déduire la relation suivante :

$$\bar{A} = 3\bar{B}\left(1 - \frac{\bar{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \tag{3.3.321}$$

Pour déterminer B, il faut opérer un raccordement des métriques intérieures et extérieures à la surface de la sphère, ce que l'on peut traduire de la manière suivante en considérant 3.3.317 :

$$\bar{g}_{00}^{int}(\bar{r_n}) = e^{\bar{\nu}(\bar{r_n})} = \left[\bar{A} - \bar{B}\left(1 - \frac{\bar{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^2 = \bar{g}_{00}^{ext}(\bar{r_n}) = \left(1 - \frac{2G\bar{M}}{\bar{r_n}\bar{c}^2}\right) \tag{3.3.322}$$

Ainsi, en considérant 3.3.321, nous pouvons en déduire :

$$\bar{B}^2\left[3\left(1 - \frac{\bar{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{\bar{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^2 = \left(1 - \frac{\bar{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right) \implies \bar{B} = \frac{1}{2} \tag{3.3.323}$$

D'où nous pouvons obtenir :

$$\bar{A} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\bar{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \tag{3.3.324}$$

Soit :

$$\bar{g}_{00}^{int}(r) = \left[\frac{3}{2}\left(1 - \frac{\bar{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^2 \tag{3.3.325}$$

D'où la métrique intérieure de Schwarzschild :

$$\bar{\mathrm{d}s}^2 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{\bar{r_n}^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)}\right]^2 \mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right) \tag{3.3.326}$$

Cette métrique se raccorde à la métrique extérieure de Schwarzschild :

$$\bar{\mathrm{d}s}^2 = \left(1 - \frac{2G\bar{M}}{\bar{c}^2 r}\right)\bar{c}^2 \mathrm{d}x^{0^2} - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2G\bar{M}}{\bar{c}^2 r}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right) \tag{3.3.327}$$

Nous pouvons en déduire qu'une particule de masse négative subira un champ gravitationnel attractif sous l'effet d'une distribution de masses négatives.

Chapitre 4

Modélisation de la Dynamique Galactique

Il a été possible de construire un modèle de galaxie à symétrie sphérique entourée par un halo de masses négatives. Cette dernière a un effet confinant qui explique un certain nombre de phénomènes généralement attribués à la matière noire dans le cadre du Modèle Standard, notamment sa décélération résultant de son interaction par *friction dynamique* avec son environnement de masse négative, ainsi que sa structure spirale. Ce modèle explique également pourquoi les étoiles dans les régions extérieures des galaxies se déplacent à des vitesses plus élevées que celles prédites par la seule gravité de la matière visible. Sans les masses négatives, les lois de la gravité newtonienne suggéreraient que ces étoiles devraient se déplacer plus lentement, étant plus éloignées du centre massif de la galaxie. Cependant, les observations montrent que ces étoiles ont des vitesses relativement élevées, ce qui suggère l'influence antigravitationnelle supplémentaire d'une masse invisible, à savoir la matière à masse négative.

Les galaxies elliptiques représentent une proportion significative de la masse de l'Univers visible. Elles sont principalement composées d'étoiles âgées, caractérisées par une forte dispersion de vitesse et réparties dans le disque [1] ainsi que dans l'halo galactique, et contiennent très peu de gaz [2]. À l'opposé, les galaxies spirales contiennent environ 10% de leur masse sous forme de gaz interstellaire. Ce gaz se concentre principalement autour du plan diamétral, formant un disque très aplati. Sa distribution n'est pas uniforme, mais présente des condensations, les plus significatives contribuant à la structure en spirale de la galaxie. Dans ces galaxies, les étoiles jeunes, à faible dispersion de vitesse et concentrées près du plan de symétrie, se trouvent principalement dans les bras spiraux.

1. Le disque se réfère à une structure plate et étendue, qui est distincte des régions centrales plus denses des galaxies, appelées bulbes, et des halos galactiques externes, qui contiennent des étoiles plus anciennes et moins de gaz.

2. Les galaxies elliptiques se distinguent par leur forme sphéroïdale ou elliptique sans bras spiraux distincts. Elles ont généralement une distribution homogène d'étoiles âgées et peu de formation stellaire en cours, en raison de la rareté du gaz nécessaire à la naissance de nouvelles étoiles. Ces galaxies sont souvent trouvées dans des environnements densément peuplés comme les centres des amas de galaxies.

Les amas globulaires, en revanche, sont des systèmes à symétrie sphérique, pratiquement dépourvus de gaz.

Pour étudier la dynamique des systèmes stellaires, tels que les galaxies ou les amas globulaires, il est donc raisonnable en première approximation de négliger la présence du gaz et de se concentrer uniquement sur la population d'étoiles âgées, à forte dispersion de vitesse. Il est à noter qu'à l'échelle d'une rotation galactique, ces systèmes sont pratiquement non collisionnels et peuvent être décrits par *l'équation de Vlasov*.

4.1 L'Équation de Vlasov et ses Composants

Les systèmes stellaires auto-gravitants avaient déjà été modélisés en 1942 par S. Chandrasekhar [14] en utilisant une solution de type Maxwell-Boltzmann de *l'équation de Vlasov*, couplée à *l'équation de Poisson*. Les étoiles dans les galaxies formant des ensembles non-collisionnels [3].

En effet, *l'équation de Vlasov* est une équation fondamentale en physique des plasmas et en dynamique stellaire qui décrit l'évolution temporelle de la *fonction de distribution* $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ dans *l'espace des phases* pour un système de particules sous l'influence d'un champ de force conservatif. Cette équation aide les scientifiques à comprendre comment les groupes de particules, comme les étoiles dans une galaxie ou les particules dans un plasma, se déplacent et se comportent au fil du temps.

La *fonction de distribution* dont il est question dans cette équation représente la répartition des particules dans un espace qui prend en compte à la fois leur position et leur vitesse. Cet *espace des phases* est un outil conceptuel qui permet de visualiser et de calculer le comportement d'un grand nombre de particules simultanément.

L'équation de Vlasov est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \nabla_{\vec{r}} \Psi \cdot \nabla_{\vec{v}} f = 0 \tag{4.1.1}$$

où :

— $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ est la fonction de distribution qui représente la densité numérique de particules dans l'espace des phases à une position $\vec{r}$, avec une vitesse $\vec{v}$, au temps t.

3. Lorsque la fonction de distribution évolue *sans collision* selon *l'équation de Vlasov*, cela signifie qu'elle décrit le mouvement des particules en considérant qu'elles ne se heurtent pas directement les unes avec les autres. C'est une approximation utile pour étudier des systèmes comme les galaxies, où les étoiles sont si éloignées les unes des autres qu'elles interagissent principalement par la gravité et non par des collisions directes.

— $\frac{\partial f}{\partial t}$ est la dérivée partielle de la fonction de distribution par rapport au temps, représentant le changement de la fonction de distribution au fil du temps.

— $\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f$ représente la dérivée convective[4] dans l'espace de position, qui décrit comment la fonction de distribution change en raison du mouvement des particules à travers l'espace à la vitesse $\vec{v}$.

— $\Psi(\vec{r}, t)$ est le champ potentiel scalaire, qui dépend de la position et du temps, et son gradient négatif $-\nabla_{\vec{r}}\Psi$ donne la force par unité de masse agissant sur les particules.

— $-\nabla_{\vec{r}}\Psi \cdot \nabla_{\vec{v}} f$ est le terme de force, représentant comment la fonction de distribution change en raison des forces agissant sur les particules, modifiant leurs vitesses.

L'équation affirme que la fonction de distribution est constante le long des trajectoires des particules en l'absence de collisions, ce qui est connu comme le *théorème de Liouville*. Cette propriété est cruciale pour la conservation de la densité de l'espace des phases et sous-tend la dynamique sans collision décrite par l'équation de Vlasov.

NB :

— Dans un contexte physique, le terme $-\nabla_{\vec{r}}\Psi$ représente la force agissant sur une particule. Pour un potentiel scalaire $\Psi(\vec{r}, t)$, le gradient négatif par rapport à la position, écrit comme $-\nabla_{\vec{r}}\Psi$, nous donne le vecteur force $\vec{F}$. Cette relation est une pierre angulaire de la mécanique classique et est décrite par l'équation :

$$\vec{F} = -\nabla_{\vec{r}}\Psi \tag{4.1.2}$$

où :

— $\vec{F}$ est le vecteur force ressenti par une particule,

— $\nabla_{\vec{r}}$ désigne le gradient par rapport à la position,

— $\Psi(\vec{r}, t)$ est le champ potentiel scalaire qui dépend de la position $\vec{r}$ et du temps t.

Le signe négatif indique que la force agit dans la direction d'une énergie potentielle décroissante, ce qui s'aligne avec le principe physique selon lequel les particules tendent à se déplacer des régions de haute énergie potentielle vers des régions de basse énergie potentielle.

4. La dérivée convective décrit comment une quantité (comme la densité, la vitesse, la température, etc.) change en suivant le mouvement général d'un système fluide. Elle prend en compte à la fois la variation de la quantité dans le temps et la variation due au déplacement du fluide.

— **La distribution de Maxwell-Boltzmann**, nommée d'après James Clerk Maxwell et Ludwig Boltzmann, est une loi statistique fondamentale en physique qui joue un rôle crucial dans la description de la distribution des vitesses des particules dans un gaz à une température spécifique. Lorsqu'un gaz est chauffé, de l'énergie est transmise à ses particules, les amenant à se déplacer à différentes vitesses. Cette distribution caractérise mathématiquement comment ces vitesses sont réparties parmi les particules dans un gaz en équilibre, signifiant que la distribution globale des vitesses reste constante dans le temps, même si les particules individuelles peuvent échanger de l'énergie lors de collisions.

Pour illustrer ce concept, imaginez une salle remplie de balles rebondissantes, chacune représentant une particule dans le gaz. Ces balles entrent en collision les unes avec les autres, en changeant parfois de vitesse. Certaines peuvent ralentir, tandis que d'autres accélèrent. Avec le temps, vous observerez que certaines balles se déplacent lentement, la plupart à des vitesses modérées, et quelques-unes se déplacent très rapidement. La distribution des vitesses de Maxwell est un modèle mathématique qui prédit la proportion de particules se déplaçant à chaque vitesse dans le gaz.

La distribution est exprimée par la fonction de densité de probabilité $f(v)$, où v est la vitesse d'une particule, m est la masse d'une particule, k est la constante de Boltzmann, T est la température du gaz. La formule pour $f(v)$ est donnée par :

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \tag{4.1.3}$$

Comprendre la distribution de Maxwell-Boltzmann est essentiel non seulement pour saisir le comportement des gaz mais forme également la base de la théorie cinétique des gaz, qui aide les scientifiques à prédire les propriétés des gaz telles que la diffusion, la viscosité et la conductivité thermique.

4.2 Le Système Vlasov-Poisson

Le système Vlasov-Poisson décrit l'évolution d'un système auto-gravitant en l'absence de collisions. Comme nous l'avons évoqué, l'équation de Vlasov régit l'évolution de la fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ dans l'espace des phases et l'équation de Poisson relie le potentiel gravitationnel Ψ à la densité de masse ρ :

$$\Delta\Psi = 4\pi G\rho \tag{4.2.1}$$

où ρ est liée à la fonction de distribution par $\rho(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t)\, \mathrm{d}^3\vec{v}$, qui est la densité de masse obtenue en intégrant la fonction de distribution sur toutes les vitesses. Ce système d'équations est fondamental dans l'étude de la dynamique des systèmes stellaires et des galaxies.

NB : La connexion entre l'équation de Poisson et l'équation de Vlasov se fait par le potentiel gravitationnel Ψ. Dans un système composé de nombreuses particules, telles que les étoiles dans une galaxie ou les molécules dans un gaz, l'équation de Vlasov régit l'évolution de la fonction de distribution des particules dans l'espace des phases, et l'équation de Poisson relie l'effet collectif de la distribution de masse de ces particules au champ de potentiel dans lequel elles se déplacent. Lorsque l'équation de Vlasov est utilisée pour décrire un système auto-gravitant de particules, comme les étoiles dans une galaxie, elle est souvent couplée avec l'équation de Poisson. Le potentiel gravitationnel qui apparaît dans l'équation de Vlasov est le même potentiel qui satisfait l'équation de Poisson. Dans ce système couplé, l'équation de Poisson fournit l'équation de champ qui détermine le potentiel gravitationnel Ψ résultant de la distribution de masse ρ, et l'équation de Vlasov utilise ce potentiel pour déterminer comment la fonction de distribution évolue dans le temps.

Dans le contexte de l'astrophysique, lors de la description du mouvement des particules dans un système, il est courant de distinguer entre la vitesse moyenne des particules et leurs vitesses individuelles ou résiduelles. La vitesse moyenne, notée $\mathbf{c}_o = \langle \mathbf{c} \rangle$, est la vitesse moyenne de toutes les particules du système. La vitesse résiduelle $\mathbf{C}$ également appelée vitesse particulière (vitesse relative ou propre) d'une particule est alors définie comme sa vitesse individuelle (ou vitesse absolue) $\mathbf{c}$ moins cette vitesse moyenne [5] :

$$\mathbf{C} = \mathbf{c} - \mathbf{c}_o \tag{4.2.2}$$

Cette vitesse résiduelle représente l'écart de la vitesse d'une particule par rapport à l'écoulement moyen et peut être associée au concept de vitesse thermique en mécanique des fluides, qui est le mouvement aléatoire des particules dans un fluide. En effet, dans un système comme une galaxie ou un fluide, les particules (comme les étoiles ou les molécules) se déplacent. La vitesse moyenne représente celle de toutes ces particules. Cependant, chaque particule a sa propre vitesse, qui peut être différente de cette moyenne. La vitesse résiduelle d'une particule est la différence entre sa vitesse individuelle et la vitesse moyenne du système. C'est comme si vous mesuriez à quel point le mouvement d'une particule est plus rapide ou plus lent que le mouvement moyen dans le système.

De plus, un opérateur D est défini. Il combine la dérivée temporelle avec la convection par l'écoulement moyen (Page 48 - Section 3.12 de [16]) :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c}_o \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \tag{4.2.3}$$

où $\frac{\partial}{\partial t}$ est la dérivée partielle temporelle, et $\mathbf{c}_o \cdot \nabla_{\mathbf{r}}$ désigne l'opérateur d'advection agissant sur un champ scalaire ou vectoriel par rapport à la vitesse moyenne (Page 9 - Section 1.33 de [16]).

5. Nous utiliserons désormais une lettre en gras pour définir un vecteur et une lettre maigre pour désigner un scalaire. De plus, nous utiliserons c plutôt que v pour définir la vitesse selon [16]

Cet opérateur D est utilisé pour décrire le changement d'une quantité à la fois par rapport au temps et tel qu'il est transporté par l'écoulement moyen. En effet, cet opérateur est une façon de prendre en compte deux choses à la fois : comment les particules changent avec le temps (c'est la partie $\frac{\partial}{\partial t}$) et comment elles se déplacent avec l'écoulement ou le mouvement moyen du système (c'est la partie $\mathbf{c}_o \cdot \nabla_{\mathbf{r}}$). $\mathbf{c}_o$ est la vitesse moyenne, et $\nabla_{\mathbf{r}}$ est un opérateur mathématique qui mesure comment les particules changent d'un endroit à l'autre. En combinant ces deux, l'opérateur D nous aide à comprendre comment une quantité (comme la densité ou la pression) change non seulement au fil du temps mais aussi en se déplaçant avec le flux général du système.

Il est particulièrement utile dans l'étude de la dynamique des fluides et de la physique des plasmas, où il peut simplifier les équations régissant le comportement du système en se concentrant sur les fluctuations plutôt que sur le mouvement global.

Nous pouvons alors considérer deux équations de Vlasov, écrites en termes de vitesses résiduelles, couplées avec l'équation de Poisson. Ces équations sont écrites :

$$\frac{Df}{Dt} + \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f - \left(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \frac{D\mathbf{c}_o}{Dt} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{C}} f - \nabla_{\mathbf{C}} f \cdot \mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{c}_o = 0 \tag{4.2.4}$$

$$\frac{\underline{D}\underline{f}}{\underline{Dt}} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \underline{f} - \left(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \frac{\underline{D\mathbf{c}}_o}{\underline{Dt}} \right) \cdot \nabla_{\underline{\mathbf{C}}} \underline{f} - \nabla_{\underline{\mathbf{C}}} f \cdot \underline{\mathbf{C}} : \nabla_{\mathbf{r}} \underline{\mathbf{c}}_o = 0 \tag{4.2.5}$$

où, je le rappelle, D est la dérivée convective par rapport à l'écoulement moyen, $\mathbf{c}_o$ est la vitesse moyenne, $\mathbf{C}$ est la vitesse résiduelle ou la vitesse relative (agitation thermique), f est la fonction de distribution, et Ψ est le potentiel gravitationnel.

Les termes $\nabla_{\mathbf{C}} f \cdot \mathbf{C}$ et $\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{c}_o$ sont appelés produits dyadiques [6], qui sont des opérations tensorielles aboutissant à des matrices (dans ce contexte, appelées matrices dyadiques selon [16] et [79]). Le terme $\nabla_{\mathbf{C}} f \cdot \mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{c}_o$ représente le produit scalaire de deux dyades défini ([16] page 16 eq. 1.31.4 et [79] section 3.3) par la notation $A : B = A_i^j B_i^j$.

NB : $A : B$ représente le produit scalaire (point) de deux matrices ou dyades, où chaque élément de la première matrice A est multiplié par l'élément correspondant de la seconde matrice B, et les produits sont sommés :

$$A : B = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} A_{ij} B_{ij} \tag{4.2.6}$$

Or, on sait d'après 4.2.3 que :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c}_o \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \nabla_t f + \mathbf{c}_o \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f \tag{4.2.7}$$

6. Ce sont des opérations mathématiques complexes qui transforment les vitesses et d'autres quantités en matrices (un type de tableau mathématique). Ces matrices sont utilisées pour décrire les relations entre différentes vitesses et pour comprendre comment elles changent ensemble.

Soit :

$$\frac{D\ln(f)}{Dt} = \frac{1}{f}\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial \ln(f)}{\partial t} + \mathbf{c}_o \frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{r}} = \nabla_t \ln(f) + \mathbf{c}_o \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \ln(f) \tag{4.2.8}$$

Ainsi, les équations 4.2.4 et 4.2.5 deviennent :

$$\nabla_t \ln(f) + \mathbf{c}_o \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \ln(f) + \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \ln(f) - \left(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \frac{D\mathbf{c}_o}{Dt}\right) \cdot \nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) - \nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) \cdot \mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{c}_o = 0 \tag{4.2.9}$$

$$\nabla_{\underline{t}} \underline{\ln(f)} + \underline{\mathbf{c}}_o \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \underline{\ln(f)} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \underline{\ln(f)} - \left(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \frac{\underline{D\mathbf{c}_o}}{\underline{Dt}}\right) \cdot \nabla_{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\ln(f)} - \nabla_{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\ln(f)} \cdot \underline{\mathbf{C}} : \nabla_{\mathbf{r}} \underline{\mathbf{c}}_o = 0 \tag{4.2.10}$$

Pour rechercher les solutions de ces équations, le principe est le suivant :

1. On commence par prendre une distribution f en fonction des vitesses et du temps.
2. Ensuite, on la substitue dans l'équation de Vlasov.
3. On regroupe les termes en fonction des monômes des composantes de la vitesse, ce qui génère autant d'équations individuelles.

4.3 Modélisation d'une Galaxie à Distribution de Vitesse Ellipsoïdale

La distribution des vitesses dans un système stellaire peut souvent être décrite par une fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann. Le logarithme naturel de cette fonction de distribution f est exprimé en fonction des composantes C_x, C_y, C_z de la vitesse résiduelle, qui dans le cas de la distribution de Maxwell-Boltzmann aboutit à un polynôme sphérique.

Si la distribution n'est pas isotrope [7], ce qui est souvent le cas, par exemple dans le système solaire autour du Soleil, la distribution des vitesses peut adopter une forme ellipsoïdale, comme le montre la figure 4.1. En effet, l'ellipsoïde de vitesses représente un espace des vitesses où la distribution est plutôt de forme ellipsoïdale que sphérique, indiquant une distribution anisotrope [8].

La distribution des vitesses résiduelles stellaires autour du Soleil n'est pas isotrope mais correspond à un ellipsoïde des vitesses où l'un des axes est à peu près le double des deux autres. La figure 4.1 représente l'ellipsoïde des vitesses d'une galaxie

7. Le terme *isotrope* fait référence à une propriété qui est identique dans toutes les directions. Une distribution isotrope des vitesses signifierait que les vitesses des objets dans l'espace sont réparties de manière uniforme dans toutes les directions.

8. Les vitesses des étoiles ou des particules au sein d'une galaxie ne sont pas distribuées uniformément dans toutes les directions (isotrope), mais plutôt de manière anisotrope, avec des préférences de direction qui peuvent être décrites par un ellipsoïde

en rotation autour de l'axe $\overrightarrow{OZ}$ [9]. Un modèle de galaxie (ou d'amas globulaire) a été construit correspondant à cette figure.

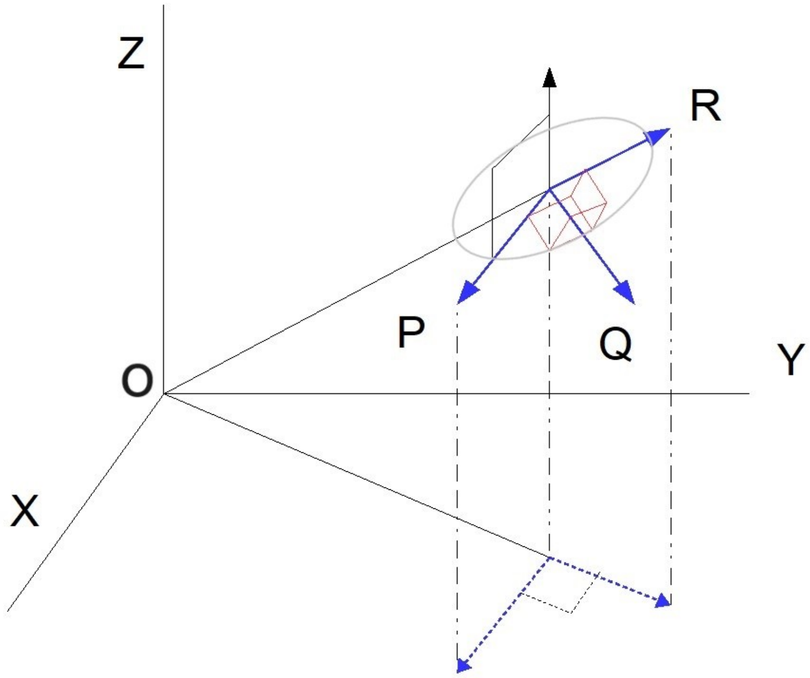


FIGURE 4.1 – Ellipsoïde des vitesses à symétrie cylindrique.

On choisit une distribution ellipsoïdale où les vitesses forment un ellipsoïde défini selon une fonction logarithmique de distribution des vitesses quadratiques :

$$\ln(f) = \ln(B) + a_r \mathbf{C}_r^2 + a_p \mathbf{C}_p^2 + a_q \mathbf{C}_q^2 \tag{4.3.1}$$

Ces termes de vitesse sont quadratiques car ils sont proportionnels au carré des composantes de vitesse dans chaque direction respective :

— $\mathbf{C}_r$ est le vecteur unitaire dans la direction de $\mathbf{r}$, et a_r est la composante de la vitesse $\mathbf{C}$ le long de cet axe.
— $\mathbf{C}_p$ est le vecteur unitaire dans la direction perpendiculaire à la fois à $\mathbf{r}$ et à l'axe Z, et a_p est la composante de la vitesse $\mathbf{C}$ le long de cet axe.
— $\mathbf{C}_q$ est le vecteur unitaire dans la direction perpendiculaire aux deux directions précédentes, formant ainsi un trièdre. a_q est la composante de la vitesse

9. Dans une galaxie sphérique, la distribution des positions présente une symétrie sphérique. Cependant, si la galaxie tourne autour de l'axe $\overrightarrow{OZ}$, comme une galaxie spirale, alors la distribution des vitesses ne peut plus être à symétrie sphérique. En réalité, la vitesse moyenne d'agitation de la matière composant la galaxie devient perpendiculaire à l'axe de rotation. Une distribution à symétrie cylindrique est alors plus appropriée pour représenter ce scénario. Nous cherchons donc une distribution des vitesses où la vitesse moyenne est principalement tangentielle au plan de rotation de la galaxie (avec une composante radiale éventuelle). Pour ce faire, nous décomposons la vitesse d'agitation en introduisant les composantes radiale et tangentielle, avec trois inconnues (H, a et α) que nous cherchons à déterminer à l'aide de l'équation de Vlasov.

$\mathbf{C}$ le long de cet axe.

Dans le cadre d'une distribution de vitesse ellipsoïdale, 4.3.1 peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$\ln(f) = \ln(B) - \frac{m}{2kH}\mathbf{C}^2 + a(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r})^2 + \alpha[\mathbf{C}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{r})]^2 \tag{4.3.2}$$

où :

- $\mathbf{k}$ est le vecteur unitaire selon $\overrightarrow{OZ}$ autour duquel la galaxie tourne [10]
- $\mathbf{R}$ est le vecteur unitaire selon l'axe radial colinéaire à $\mathbf{r}$ donné par la relation suivante : $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$
- $\mathbf{P}$ est le vecteur unitaire dans la direction perpendiculaire à $\mathbf{r}$ et à l'axe Z donné par la relation suivante : $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{R}}{\|\mathbf{k}\times\mathbf{R}\|}$ [11]
- $\mathbf{Q}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire aux deux vecteurs précédents donné par la relation suivante : $\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{P}\times\mathbf{R}}{\|\mathbf{P}\times\mathbf{R}\|}$
- B, H, a et α dépendent à priori du temps et de l'espace.

Or, nous pouvons poser les hypothèses suivantes :

1. Nous nous placerons en régime stationnaire, ce qui signifie qu'il n'y a pas de dépendance implicite par rapport au temps.
2. Nous considérerons une solution présentant une symétrie autour de l'axe $\overrightarrow{OZ}$, caractérisée par une rotation autour de cet axe avec une vitesse moyenne tangentielle.

Ce qui se traduit par les simplifications suivantes :

$$\frac{\partial \ln(f)}{\partial t} = 0 \tag{4.3.3}$$

$$\frac{D\mathbf{c}_o}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial t} + \mathbf{c}_o\cdot\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{c}_o\cdot\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}} \tag{4.3.4}$$

$$\mathbf{c}_o\cdot\frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{r}} = 0 \tag{4.3.5}$$

Les équations de Vlasov 4.2.9 et 4.2.10 se réduisent alors aux expressions suivantes :

$$\mathbf{C}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\ln(f) - \left(\nabla_{\mathbf{r}}\Psi + \mathbf{c}_o\cdot\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}}\right)\cdot\nabla_{\mathbf{C}}\ln(f) - \nabla_{\mathbf{C}}\ln(f)\cdot\mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{r}}\mathbf{c}_o = 0 \tag{4.3.6}$$

$$\underline{\mathbf{C}}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\underline{\ln(f)} - \left(\nabla_{\mathbf{r}}\Psi + \underline{\mathbf{c}}_o\cdot\frac{\partial \underline{\mathbf{c}}_o}{\partial \mathbf{r}}\right)\cdot\nabla_{\underline{\mathbf{C}}}\underline{\ln(f)} - \nabla_{\underline{\mathbf{C}}}\underline{\ln(f)}\cdot\underline{\mathbf{C}} : \nabla_{\mathbf{r}}\underline{\mathbf{c}}_o = 0 \tag{4.3.7}$$

10. Vecteur unitaire $\mathbf{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ suivant l'axe Z dans le repère (X, Y, Z).

11. Le produit vectoriel génère un vecteur orthogonal par rapport à deux vecteurs donnés. Ensuite, la normalisation de ce vecteur résultant est réalisée en le divisant par sa propre norme.

4.3.1 Tentatives de Développement de Solutions pour la Première Équation de Vlasov

Essayons d'établir une solution de équation de Vlasov 4.3.6. En effet, cette expression comporte trois termes. Le premier donné par $\mathbf{C}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\ln(f)$ va donner des solutions de vitesse d'ordre trois et un. Le second $\left(\nabla_{\mathbf{r}}\Psi + \mathbf{c}_o \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}}\right)\cdot\nabla_{\mathbf{C}}\ln(f)$ nous permettra d'obtenir des solutions de vitesse d'ordre un et le dernier $\nabla_{\mathbf{C}}\ln(f)\cdot\mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{r}}\mathbf{c}_o$ d'ordre deux.

Solution d'ordre 3 pour la fonction de distribution elliptique des vitesses

Le premier terme de l'équation de Vlasov 4.3.6 doit satisfaire la relation suivante :

$$\mathbf{C}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\ln(f) = 0 \tag{4.3.8}$$

Or, pour simplifier davantage les calculs, nous pouvons poser :

$$\mathbf{c}_o = \omega(\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = \omega\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix} \tag{4.3.9}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = \omega\frac{\partial(\mathbf{k}\times\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \tag{4.3.10}$$

Soit :

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = -yC_x + xC_y \tag{4.3.11}$$

$$[\mathbf{C}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{r})](\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} y^2C_x - xyC_y\\ -xyC_x + x^2C_y\\ 0\end{pmatrix} \tag{4.3.12}$$

Ainsi, l'introduction de l'équation 4.3.2 dans 4.3.8 nous permet d'obtenir la relation suivante, en ne conservant que les termes d'ordre trois :

$$-\frac{m}{2k}\mathbf{C}^2\mathbf{C}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\frac{1}{H}\right) + 2a(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r})\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{C}\cdot\frac{\partial a}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r})^2 + \mathbf{C}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{r}}[\mathbf{C}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{r})]^2 = 0 \tag{4.3.13}$$

Nous pouvons l'exprimer en fonction des composantes C_x, C_y, C_z de la vitesse résiduelle, colinéaires au trièdre formé par les axes $(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z})$, afin de profiter de la symétrie autour de l'axe $\overrightarrow{OZ}$ et de regrouper ensuite les monômes :

$$\begin{aligned}
&-\frac{m}{2k}\left(C_x^2+C_y^2+C_z^2\right)\left(C_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + C_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + C_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right)\right)\\
&+2a\left(C_x^2+C_y^2+C_z^2\right)\left(xC_x+yC_y+zC_z\right)\\
&+\left(C_x\frac{\partial a}{\partial x}+C_y\frac{\partial a}{\partial y}+C_z\frac{\partial a}{\partial z}\right)\left(xC_x+yC_y+zC_z\right)^2\\
&+\left(C_x\frac{\partial \alpha}{\partial x}+C_y\frac{\partial \alpha}{\partial y}+C_z\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)\left(-yC_x+xC_y\right)^2 = 0
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Nous obtenons ainsi 45 termes qui, regroupées par monômes, permettent de déduire les dix équations aux dérivées partielles suivantes :

$$C_x^3 : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ax + x^2\frac{\partial a}{\partial x} + y^2\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \tag{4.3.15}$$

$$C_y^3 : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ay + y^2\frac{\partial a}{\partial y} + x^2\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \tag{4.3.16}$$

$$C_z^3 : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) + 2az + z^2\frac{\partial a}{\partial z} = 0 \tag{4.3.17}$$

$$C_x^2C_y : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ay + x^2\frac{\partial a}{\partial y} + 2xy\frac{\partial a}{\partial x} + y^2\frac{\partial \alpha}{\partial y} - 2xy\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \tag{4.3.18}$$

$$C_y^2C_x : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ax + y^2\frac{\partial a}{\partial x} + 2xy\frac{\partial a}{\partial y} + x^2\frac{\partial \alpha}{\partial x} - 2xy\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \tag{4.3.19}$$

$$C_x^2C_z : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) + 2az + x^2\frac{\partial a}{\partial z} + 2xz\frac{\partial a}{\partial x} + y^2\frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0 \tag{4.3.20}$$

$$C_y^2C_z : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) + 2az + y^2\frac{\partial a}{\partial z} + 2yz\frac{\partial a}{\partial y} + x^2\frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0 \tag{4.3.21}$$

$$C_z^2C_x : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ax + z^2\frac{\partial a}{\partial x} + 2xz\frac{\partial a}{\partial z} = 0 \tag{4.3.22}$$

$$C_z^2C_y : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ay + z^2\frac{\partial a}{\partial y} + 2yz\frac{\partial a}{\partial z} = 0 \tag{4.3.23}$$

$$C_xC_yC_z : 2yz\frac{\partial a}{\partial x} + 2xz\frac{\partial a}{\partial y} + 2xy\frac{\partial a}{\partial z} - 2xy\frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0 \tag{4.3.24}$$

En faisant l'hypothèse que a et α ne dépendent pas de r, nous obtenons :

$$C_x^3 \equiv C_z^2C_x \equiv C_y^2C_x : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ax = 0 \tag{4.3.25}$$

$$C_y^3 \equiv C_x^2C_y \equiv C_z^2C_y : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right) + 2ay = 0 \tag{4.3.26}$$

$$C_z^3 \equiv C_x^2C_z \equiv C_y^2C_z : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{H}\right) + 2az = 0 \tag{4.3.27}$$

Or, nous savons que le rayon de l'ellipsoïde sur son plan de rotation défini selon le repère (X, Y) autour de l'axe Z est donné par [12] :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \implies \begin{cases} \dfrac{\partial \rho^2}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial \rho^2}{\partial y} = 2y \end{cases} \tag{4.3.28}$$

12. En sachant que $r^2 = \rho^2 + z^2$ avec $\rho^2 = x^2 + y^2$

Nous obtenons alors en fonction de ρ :

$$C_x^3 \equiv C_z^2 C_x \equiv C_y^2 C_x : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right) + a = 0 \tag{4.3.29}$$

$$C_y^3 \equiv C_x^2 C_y \equiv C_z^2 C_y : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right) + a = 0 \tag{4.3.30}$$

$$C_z^3 \equiv C_x^2 C_z \equiv C_y^2 C_z : -\frac{m}{2k}\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right) + a = 0 \tag{4.3.31}$$

Soit après intégration :

$$\frac{\partial}{\partial \rho^2}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{2k}{m}a \Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{2k}{m}a\rho^2 + f_1(z^2) \tag{4.3.32}$$

$$\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{2k}{m}a \Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{2k}{m}az^2 + f_2(\rho^2) \tag{4.3.33}$$

La fonction f_1 ne dépend que de z^2, donc si on dérive (4.3.32) par rapport à z^2, nous obtenons 4.3.33, soit :

$$\frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{2k}{m}a\rho^2 + f_1(z^2)\right) = \frac{\partial}{\partial z^2}f_1(z^2) = \frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{2k}{m}a \tag{4.3.34}$$

Donc :

$$f_1(z^2) = \frac{2k}{m}az^2 + k_z \tag{4.3.35}$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{H} = \frac{2k}{m}a\rho^2 + \frac{2k}{m}az^2 + k_z \tag{4.3.36}$$

Or en se plaçant à $r = 0$ ($\rho^2 = 0$ et $z^2 = 0$), nous avons $\frac{1}{H} = k_z$ que l'on décide d'associer à $\frac{1}{T_0}$ [13].

Ainsi, la solution cohérente permettant de satisfaire ces équations s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{T_0}\left(1 + \frac{2kaT_0}{m}r^2\right) \tag{4.3.37}$$

Soit en posant :

$$r_0^2 = \frac{m}{2akT_0} \implies H = \frac{T_0}{1 + \frac{r^2}{r_0^2}} \tag{4.3.38}$$

Or, nous savons que la composante d'un vecteur quelconque **C** sur l'un des axes du repère est la projection orthogonale, qui s'obtient en effectuant le produit scalaire du vecteur **C** avec le vecteur unitaire de l'axe en question. Nous pouvons ainsi exprimer les composantes de 4.3.1 de la manière suivante :

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{C}\cdot\mathbf{R} = \mathbf{C}\cdot\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \tag{4.3.39}$$

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{C}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{C}\cdot\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{r}}{\|\mathbf{k}\times\mathbf{r}\|} = \frac{\mathbf{C}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{r})}{\|\mathbf{k}\times\mathbf{r}\|} \tag{4.3.40}$$

$$\mathbf{C}_q = \mathbf{C} - \mathbf{C}_r - \mathbf{C}_p \tag{4.3.41}$$

13. T_0 étant une fonction du temps

Et en tenant compte du fait que [14] :

$$\|\mathbf{k}\times\mathbf{r}\|^2 = (\mathbf{k}\times\mathbf{r})\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = r^2 - z^2 = \rho^2 \quad (4.3.42)$$

Après introduction dans 4.3.1 et en regroupant les termes, nous obtenons :

$$\ln(f) = \ln(B) + \frac{(a_r - a_q)}{r^2}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r})^2 + \frac{(a_p - a_q)}{\rho^2}[\mathbf{C}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{r})]^2 + a_q\mathbf{C}^2 \quad (4.3.43)$$

Ainsi, par identification avec 4.3.2, nous pouvons en déduire que :

$$a_q = -\frac{m}{2kH} \quad (4.3.44)$$

$$a = \frac{(a_r - a_q)}{r^2} \Rightarrow a_r = -\frac{m}{2kH} + ar^2 \quad (4.3.45)$$

$$\alpha = \frac{(a_p - a_q)}{\rho^2} \Rightarrow a_p = -\frac{m}{2kH} + a\rho^2 \quad (4.3.46)$$

Si on pose également :

$$\rho_0^2 = \frac{m}{2\alpha kT_0} \quad (4.3.47)$$

Alors, nous obtenons :

$$a_r = -\frac{m}{2kT_0} \quad (4.3.48)$$

$$a_p = -\frac{m}{2kT_0}\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \quad (4.3.49)$$

$$a_q = -\frac{m}{2kT_0} + \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right) \quad (4.3.50)$$

Nous pouvons en déduire la fonction logarithmique de distribution des vitesses quadratiques :

$$f = f_0 e^{\left(-\frac{m}{2kT_0}\left[\mathbf{C}_r^2 + \mathbf{C}_p^2\left(1+\frac{r^2}{r_0^2}-\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) + \mathbf{C}_q^2\left(1+\frac{r^2}{r_0^2}\right)\right]\right)} \quad (4.3.51)$$

avec :

$$f_0 = n\left(\frac{m}{2\pi kT_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.52)$$

14. L'identité de Lagrange est une relation bien connue en mathématiques qui s'énonce comme suit :

$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$$

où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des vecteurs.

Solution d'ordre 2 pour la détermination des vitesses angulaire et circulaire

Le dernier terme de l'équation de Vlasov 4.3.6 correspondant à $\nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) \cdot \mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{c}_o$ est le double produit de deux dyadiques qui est égal à la trace du produit des matrices correspondantes devant satisfaire la relation suivante :

$$\nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) \cdot \mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{c}_o = \mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) = 0 \tag{4.3.53}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) \cdot \mathbf{C} \\ \mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{c}_o \end{cases}$$

<u>Calculons **B** :</u>

D'après 4.3.9, nous pouvons en déduire :

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{c}_{0x}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{c}_{0y}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{c}_{0x}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{c}_{0y}}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{c}_{0x}}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{c}_{0y}}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\frac{\partial \omega}{\partial x} & x\frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega & 0 \\ -y\frac{\partial \omega}{\partial y} - \omega & x\frac{\partial \omega}{\partial y} & 0 \\ -y\frac{\partial \omega}{\partial z} & x\frac{\partial \omega}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.54}$$

<u>Calculons **A** :</u>

$$\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) \cdot \mathbf{C} \tag{4.3.55}$$

D'après 4.3.2, nous pouvons en déduire :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\frac{m}{kH}\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} + 2a(\mathbf{C} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{C} + 2\alpha[\mathbf{C} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r})] \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{C} && (4.3.56) \\ &= \mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} + \mathbf{A_3} && (4.3.57) \end{aligned}$$

Calculons chaque terme :

$$\mathbf{A_1} = -\frac{m}{kH} \begin{pmatrix} C_x^2 & C_xC_y & C_xC_z \\ C_yC_x & C_y^2 & C_yC_z \\ C_zC_x & C_zC_y & C_z^2 \end{pmatrix}, \tag{4.3.58}$$

$$\mathbf{A_2} = 2a(xC_x + yC_y + zC_z) \begin{pmatrix} xC_x & xC_y & xC_z \\ yC_x & yC_y & yC_z \\ zC_x & zC_y & zC_z \end{pmatrix}, \tag{4.3.59}$$

$$\mathbf{A_3} = 2\alpha \begin{pmatrix} y^2C_x - xyC_y \\ -xyC_x + x^2C_y \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_x & C_y & C_z \end{pmatrix} \tag{4.3.60}$$

$$= 2\alpha \begin{pmatrix} y^2C_xC_x - xyC_yC_x & y^2C_xC_y - xyC_yC_y & y^2C_xC_z - xyC_yC_z \\ -xyC_xC_x + x^2C_yC_x & -xyC_xC_y + x^2C_yC_y & -xyC_xC_z + x^2C_yC_z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3.61}$$

Considérons les deux matrices **A** et **B** suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix} \tag{4.3.62}$$

La trace de leur produit matriciel est donnée par :

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) = A_{xx}B_{xx} + A_{xy}B_{yx} + A_{xz}B_{zx} + A_{yx}B_{xy} + A_{yy}B_{yy} + A_{yz}B_{zy} + 0 \tag{4.3.63}$$

Calculons chacun des termes de cette trace :

$$A_{xx} = -\frac{m}{kH}C_x^2 + 2a(x^2C_x^2 + yxC_xC_y + zxC_xC_z) + 2\alpha(y^2C_x^2 - xyC_yC_x) \tag{4.3.64}$$

$$= C_x^2\left(-\frac{m}{kH} + 2ax^2 + 2\alpha y^2\right) + C_xC_y2(a-\alpha)xy + C_xC_z2axz \tag{4.3.65}$$

$$A_{yy} = -\frac{m}{kH}C_y^2 + 2a(xC_xyC_y + yC_yyC_y + zC_zyC_y) + 2\alpha(-xyC_xC_y + x^2C_yC_y) \tag{4.3.66}$$

$$= C_y^2\left(-\frac{m}{kH} + 2ay^2 + 2\alpha x^2\right) + C_xC_y2(a-\alpha)xy + C_yC_z2ayz \tag{4.3.67}$$

$$A_{xy} = -\frac{m}{kH}C_xC_y + 2a(xC_xxC_y + yC_yxC_y + zC_zxC_y) + 2\alpha(y^2C_xC_y - xyC_yC_y) \tag{4.3.68}$$

$$= C_xC_y\left(-\frac{m}{kH} + 2\alpha x^2 + 2\alpha y^2\right) + C_y^22(a-\alpha)xy + C_yC_z2axz \tag{4.3.69}$$

$$A_{yx} = -\frac{m}{kH}C_yC_x + 2a(xC_xyC_x + yC_yyC_x + zC_zyC_x) + 2\alpha(-xyC_xC_x + x^2C_yC_x) \tag{4.3.70}$$

$$= C_x^22(a-\alpha)xy + C_xC_y\left(-\frac{m}{kH} + 2ay^2 + 2\alpha x^2\right) + C_xC_z2ayz \tag{4.3.71}$$

$$A_{xz} = -\frac{m}{kH}C_xC_z + 2a(xC_xxC_z + yC_yxC_z + zC_zxC_z) + 2\alpha(y^2C_xC_z - xyC_yC_z) \tag{4.3.72}$$

$$= C_z^22axz + C_xC_z\left(-\frac{m}{kH} + 2ax^2 + 2\alpha y^2\right) + C_yC_z2(a-\alpha)xy \tag{4.3.73}$$

$$A_{yz} = -\frac{m}{kH}C_yC_z + 2a(xC_xyC_z + yC_yyC_z + zC_zyC_z) + 2\alpha(-xyC_xC_z + x^2C_yC_z) \tag{4.3.74}$$

$$= C_z^22ayz + C_xC_z2(a-\alpha)xy + C_yC_z\left(-\frac{m}{kH} + 2ay^2 + 2\alpha x^2\right) \tag{4.3.75}$$

$$\tag{4.3.76}$$

Les termes en C_x^2 proviennent de A_{xx} B_{xx} et A_{yx} B_{xy} :

$$\left(-\frac{m}{kH} + 2ax^2 + 2\alpha y^2\right)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) + 2(a-\alpha)xy\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x} + \omega\right) = 0 \tag{4.3.77}$$

Les termes en C_y^2 proviennent de A_{xy} B_{yx} et A_{yy} B_{yy} :

$$\left(-\frac{m}{kH} + 2ay^2 + 2\alpha x^2\right)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) + 2(a-\alpha)xy\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial y} - \omega\right) = 0 \tag{4.3.78}$$

Les termes en C_z^2 proviennent de $A_{xz}\ B_{zx}$ et $A_{yz}\ B_{zy}$:

$$2axz\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)+2ayz\left(x\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)=0 \tag{4.3.79}$$

Les termes en C_xC_y proviennent de $A_{xy}\ B_{yx}$, $A_{xx}\ B_{xx}$, $A_{yx}\ B_{xy}$ et $A_{yy}\ B_{yy}$:

$$\left(-\frac{m}{kH}+2ax^2+2\alpha y^2\right)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial y}-\omega\right)+2(a-\alpha)xy\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) \tag{4.3.80}$$

$$+\left(-\frac{m}{kH}+2ay^2+2\alpha x^2\right)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}+\omega\right)+2(a-\alpha)xy\left(x\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)=0 \tag{4.3.81}$$

Les termes en C_xC_z proviennent de $A_{xz}\ B_{zx}$, $A_{xx}\ B_{xx}$, $A_{yx}\ B_{xy}$ et $A_{yz}\ B_{zy}$:

$$(2axz)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)+\left(-\frac{m}{kH}+2ax^2+2\alpha y^2\right)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) \tag{4.3.82}$$

$$+(2axy)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}+\omega\right)+2(a-\alpha)xy\left(x\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)=0 \tag{4.3.83}$$

Les termes en C_yC_z proviennent de $A_{xy}\ B_{yx}$, $A_{xz}\ B_{zx}$, $A_{yy}\ B_{yy}$ et $A_{yz}\ B_{zy}$:

$$(2axz)\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial y}-\omega\right)+2(a-\alpha)xy\left(-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) \tag{4.3.84}$$

$$+(2ayz)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)+\left(-\frac{m}{kH}+2ay^2+2\alpha x^2\right)\left(x\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)=0 \tag{4.3.85}$$

Exploitons à présent le fait que ω ne dépend que de ρ^2 et z^2 pour simplifier les expressions. Ainsi, d'après 4.3.28, nous obtenons :

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\frac{\partial\rho^2}{\partial x}=2x\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2} \tag{4.3.86}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2}\frac{\partial\rho^2}{\partial y}=2y\frac{\partial\omega}{\partial\rho^2} \tag{4.3.87}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\frac{\partial z^2}{\partial z}=2z\frac{\partial\omega}{\partial z^2} \tag{4.3.88}$$

L'équation en C_x^2 devient :

$$\frac{\partial\ln\omega}{\partial\rho^2}=-\frac{(a-\alpha)}{\left(\frac{m}{kH}-2\alpha\rho^2\right)} \tag{4.3.89}$$

En se plaçant dans le contexte particulier où a et α sont constants dans l'espace (indépendants de r), soit à partir de 4.3.37, nous pouvons en déduire la relation suivante :

$$\frac{\partial\ln\omega}{\partial\rho^2}=-\frac{1}{2}\frac{2(a-\alpha)}{\left(\frac{m}{kT_0}+2(a-\alpha)\rho^2+2az^2\right)} \tag{4.3.90}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho^2}\left[\ln\left(\frac{m}{kT_0}+2(a-\alpha)\rho^2+2az^2\right)\right] \tag{4.3.91}$$

Ainsi la solution obtenue est donnée par :

$$\omega = \frac{\omega_{\rho_0}(z^2)}{\sqrt{\frac{m}{kT_0} + 2(a-\alpha)\rho^2 + 2az^2}} \tag{4.3.92}$$

Les solutions des autres équations sont compatibles [15].

De la même manière que précédemment, l'équation en C_xC_z nous donne :

$$\frac{\partial \ln \omega}{\partial z^2} = -\frac{a}{\left(\frac{m}{kH} - 2\alpha\rho^2\right)} \tag{4.3.93}$$

En se plaçant dans le même contexte particulier où a et α sont indépendants de r, nous pouvons en déduire la vitesse angulaire de la galaxie :

$$\omega = \frac{\omega_{z_0}(\rho^2)}{\sqrt{\frac{m}{kT_0} + 2(a-\alpha)\rho^2 + 2az^2}} \tag{4.3.94}$$

Cette solution étant compatible avec le dernier terme en C_yC_z [16].

Dans le contexte de la dynamique des galaxies, si ω représente la vitesse angulaire de la galaxie [17], alors la vitesse circulaire v à un rayon ρ est donnée par :

$$v = \rho \cdot \omega = \rho \cdot \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{m}{kT_0} + 2(a-\alpha)\rho^2 + 2az^2}} \tag{4.3.95}$$

Ainsi nous pouvons établir une relation entre la force gravitationnelle exercée par la galaxie et la force centrifuge ressentie par un objet en orbite circulaire de la manière suivante :

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = \rho\omega^2 = \frac{\rho\omega_0^2}{\frac{m}{kT_0} + 2a\rho^2 + 2(a-\alpha)z^2} \tag{4.3.96}$$

La dérivée partielle du potentiel gravitationnel Ψ par rapport à la coordonnée radiale ρ, notée $-\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}$, représente l'accélération gravitationnelle. Pour qu'un objet maintienne une orbite circulaire, cette accélération doit être égale à la force centrifuge, qui est donnée par $\rho\omega^2$ [18].

15. Pour les termes en C_y^2, $C_z^2 = 0$ et C_xC_y
16. $\left(\frac{m}{kH} - 2\alpha\rho^2\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial z^2}\right) = -a\omega$
17. Cela est dû au fait que la vitesse circulaire est la vitesse à laquelle une étoile (ou tout autre objet) doit se déplacer le long d'un chemin circulaire pour maintenir une orbite stable autour du centre de la galaxie, en raison de la force centripète fournie par l'attraction gravitationnelle de la galaxie.
18. La contrainte sur le potentiel gravitationnel indique que pour une étoile en orbite stable, la force gravitationnelle doit exactement contrebalancer la force centrifuge à chaque rayon ρ. Cette condition est fondamentale pour la détermination de la distribution de masse dans les galaxies en utilisant les courbes de rotation observées.

Solution d'ordre 1

Les termes contribuant à la solution de l'équation de Vlasov sont $\mathbf{C}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\ln(f)$ et $\left(\nabla_{\mathbf{r}}\Psi + \mathbf{c}_o\cdot\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}}\right)\cdot\nabla_{\mathbf{C}}\ln(f)$, et doivent satisfaire la relation :

$$\mathbf{C}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\ln(f) + \left(\nabla_{\mathbf{r}}\Psi + \mathbf{c}_o\cdot\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}}\right)\cdot\nabla_{\mathbf{C}}\ln(f) = 0 \tag{4.3.97}$$

Il faut donc exprimer $\mathbf{C}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\ln(f)$ en ne conservant que les termes d'ordre 1, soit :

$$\mathbf{C}\frac{\partial \ln B}{\partial \mathbf{r}} = C_x\frac{\partial \ln B}{\partial x} + C_y\frac{\partial \ln B}{\partial y} + C_z\frac{\partial \ln B}{\partial z} \tag{4.3.98}$$

Concernant $\left(\nabla_{\mathbf{r}}\Psi + \mathbf{c}_o\cdot\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}}\right)\cdot\nabla_{\mathbf{C}}\ln(f)$, nous savons que la vitesse angulaire d'une galaxie ω ne dépend que de ρ^2 et et z^2. Ainsi, les expressions 4.3.86, 4.3.87 et 4.3.88 nous permettent de transformer la relation 4.3.54 de la manière suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -2xy\frac{\partial \omega}{\partial r^2} & 2x^2\frac{\partial \omega}{\partial r^2}+\omega & 0 \\ -2y^2\frac{\partial \omega}{\partial r^2}-\omega & 2xy\frac{\partial \omega}{\partial r^2} & 0 \\ -2yz\frac{\partial \omega}{\partial z^2} & 2xz\frac{\partial \omega}{\partial z^2} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.99}$$

Ainsi, son produit scalaire avec 4.3.9 nous permet d'en déduire que :

$$\mathbf{c}_0\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = -\omega_{c_0}^2(x,y,0) \tag{4.3.100}$$

Donc :

$$\left(\nabla_{\mathbf{r}}\Psi + \mathbf{c}_o\cdot\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}}\right) = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x},\frac{\partial \Psi}{\partial y},\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) + \omega_{c_0}^2\left(x,y,0\right) \tag{4.3.101}$$

Or nous savons que [19] :

$$\omega_{c_0}^2(x,y,0) = -\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{r}}\right) = -\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x},\frac{\partial \Psi_0}{\partial y},\frac{\partial \Psi_0}{\partial z}\right) \quad \text{avec} \quad \Psi_0 = -\frac{1}{2}\omega_{c_0}^2\rho^2 \tag{4.3.102}$$

Par conséquent :

$$\left(\nabla_{\mathbf{r}}\Psi + \mathbf{c}_o\cdot\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}}\right) = -\frac{\partial(\Psi+\Psi_0)}{\partial \mathbf{r}} \tag{4.3.103}$$

Ainsi, d'après 4.3.9, 4.3.12 et 4.3.56, nous pouvons en déduire :

$$\nabla_{\mathbf{C}}\ln(f) = -\frac{m}{kH}\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} + 2a\begin{pmatrix} xxC_x + xyC_y + xzC_z \\ xyC_x + yyC_y + yzC_z \\ xzC_x + yzC_y + zzC_z \end{pmatrix} + 2\alpha\begin{pmatrix} y^2C_x - xyC_y \\ -xyC_x + x^2C_y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.104}$$

Ce qui donne :

$$\nabla_{\mathbf{C}}\ln(f) = \begin{pmatrix} C_x\left(-\frac{m}{kH}+2ax^2+2\alpha y^2\right) + C_y 2xy(a-\alpha) + C_z 2axz \\ C_x 2xy(a-\alpha) + C_y\left(-\frac{m}{kH}+2ay^2+2\alpha x^2\right) + C_z 2ayz \\ C_x 2axz + C_y 2ayz + C_z\left(-\frac{m}{kH}+2az^2\right) \end{pmatrix} \tag{4.3.105}$$

19. En considérant 4.3.28, nous pouvons en déduire que $\frac{\partial \Psi_0}{\partial \rho} = -\frac{1}{2}\omega_{c_0}^2\frac{\partial \rho^2}{\partial \rho} = -\omega_{c_0}^2(x,y,0)$

Nous obtenons donc :

$$\left(\nabla_{\mathbf{r}}\Psi + \mathbf{c}_o \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}}\right) \cdot \nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) = -\frac{\partial(\Psi+\Psi_0)}{\partial \mathbf{r}} \begin{pmatrix} C_x\left(-\frac{m}{kH} + 2ax^2 + 2\alpha y^2\right) + C_y 2xy(a-\alpha) + C_z 2axz \\ C_x 2xy(a-\alpha) + C_y\left(-\frac{m}{kH} + 2ay^2 + 2\alpha x^2\right) + C_z 2ayz \\ C_x 2axz + C_y 2ayz + C_z\left(-\frac{m}{kH} + 2az^2\right) \end{pmatrix} \tag{4.3.106}$$

Ainsi, les trois équations aux dérivées partielles qui satisfont les termes d'ordre 1 de l'équation de Valsov 4.3.97 sont les suivantes [20] :

$$\frac{\partial \ln B}{\partial x} + \frac{\partial(\Psi+\Psi_0)}{\partial x}\left(\frac{m}{kT_0} + 2(a-\alpha)y^2 + 2az^2\right) - 2\frac{\partial(\Psi+\Psi_0)}{\partial y}xy(a-\alpha) - 2\frac{\partial(\Psi+\Psi_0)}{\partial z}axz = 0 \tag{4.3.107}$$

$$\frac{\partial \ln B}{\partial y} - 2\frac{\partial(\Psi+\Psi_0)}{\partial x}xy(a-\alpha) + \frac{\partial(\Psi+\Psi_0)}{\partial y}\left(\frac{m}{kT_0} + 2(a-\alpha)x^2 + 2az^2\right) - 2\frac{\partial(\Psi+\Psi_0)}{\partial z}ayz = 0 \tag{4.3.108}$$

$$\frac{\partial \ln B}{\partial z} + 2\frac{\partial(\Psi+\Psi_0)}{\partial x}axz + 2\frac{\partial(\Psi+\Psi_0)}{\partial y}ayz - \frac{\partial(\Psi+\Psi_0)}{\partial z}\left(\frac{m}{kT_0} + 2az^2\right) = 0 \tag{4.3.109}$$

4.3.2 Modélisation Des Effets De L'Environnement De Masse Négative Sur La Distribution De Vitesse

En symétrie sphérique, les deux axes transversaux de l'ellipsoïde des vitesses, qui sont égaux, diffèrent de l'axe pointant vers le centre de la galaxie. Pour un système axisymétrique, les deux axes transversaux diffèrent, ce qui a été développé dans la référence [64]. Dans la configuration de la figure 4.2, la forme de la fonction de distribution de vitesse correspond à une configuration particulière à symétrie sphérique :

$$\ln(f) = \ln B(r) - \frac{\mathbf{C}^2}{\langle c^2 \rangle} + a(r)(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r})^2 \tag{4.3.110}$$

L'équation prend en compte la moyenne du carré des vitesses des particules, notée $\langle c^2 \rangle$, et une fonction potentielle $B(r)$, ainsi qu'une fonction $a(r)$ qui ajuste la distribution en fonction de la distance radiale r. Le terme $\mathbf{C}$ représente la vitesse résiduelle d'agitation thermique, et $\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}$ représente le produit scalaire de la vitesse résiduelle avec le vecteur position, ce qui aurait une signification dans le contexte d'une distribution de vitesse dans une galaxie ou un système similaire.

20. Toujours en se plaçant dans le contexte particulier où a et α sont constants dans l'espace et sachant que d'après 4.3.37, nous obtenons $\frac{m}{kH} = \frac{m}{kT_0} + 2ar^2 = \frac{m}{kT_0} + 2ax^2 + 2ay^2 + 2az^2$

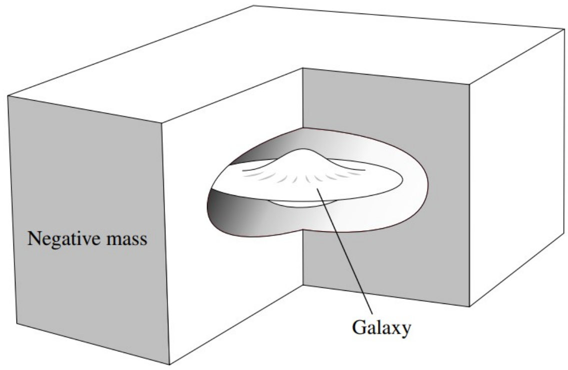


FIGURE 4.2 – Galaxie entourée d'une masse négative confinante.

Pour l'environnement de masse négative, une distribution de vitesse Maxwellienne est utilisée :

$$\ln(f) = \ln B(r) - \frac{\mathbf{C}^2}{\langle c^2 \rangle} \tag{4.3.111}$$

En introduisant ces fonctions dans les deux équations de Vlasov 4.3.6 et 4.3.7 et en utilisant l'algèbre dyadique ([16] [79]), nous obtenons des solutions exactes qui modélisent le confinement de cette galaxie correspondant à la figure 4.3.

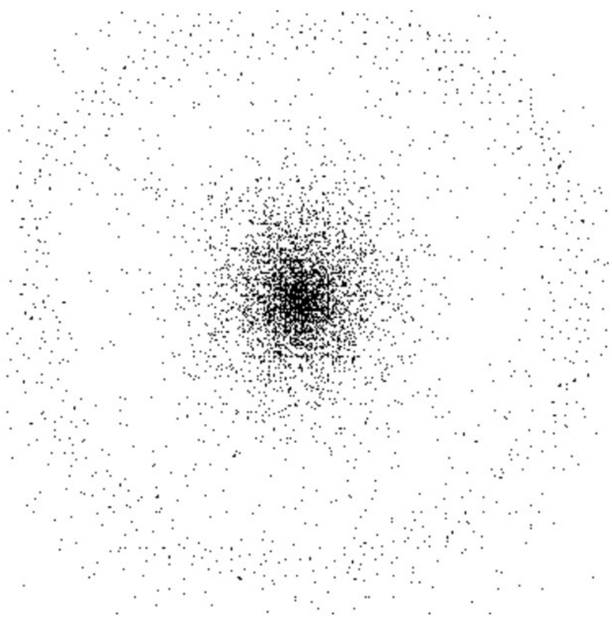


FIGURE 4.3 – Galaxie sphéroïdale, amas globulaire ou amas de galaxies.

Ce modèle met en évidence le rôle de l'environnement de masse négative dans le confinement des galaxies, des amas de galaxies et, dans le cas des galaxies, donne la possibilité de reconstruire leurs courbes de rotation plates. Les objets à masse positive sont situés dans des vides de la distribution de masse négative. Ces vides, équivalents à une masse positive, sont principalement responsables des effets de lentille gravitationnelle observés. Ainsi, le modèle rend compte de cet ensemble d'observations.

Dans cette perspective, il offre une alternative au modèle de matière noire. Dans ce contexte, une rotation de corps solide [21] est introduite.

L'image de la figure 3.7 provient de simulations numériques menées au laboratoire Deutsches Elektronen-Synchrotron (DESY) à Hambourg en 1992 par l'étudiant Frédéric Descamp, qui a utilisé le pseudonyme F. Landsheat dans ses publications. En seulement quelques cycles, après une phase transitoire, une galaxie spirale barrée se forme, et persiste pendant environ trente cycles [63].

L'évolution du moment cinétique de la galaxie, ainsi que l'établissement de sa courbe de rotation différant de la rotation initiale du corps solide, sont illustrés dans la figure 3.8.

Le phénomène de décélération sert d'illustration dans les systèmes où les collisions sont minimes et les phénomènes de transport tels que la chaleur et le moment angulaire sont négligeables. Dans le contexte des galaxies spirales, ces interactions sont orchestrées par des ondes de densité, qui deviennent évidentes dans la distribution des masses positives et de leurs contreparties dans le domaine des masses négatives, comme le démontrent les simulations numériques.

Depuis trois décennies, les astrophysiciens ont lié les structures spirales observées dans les galaxies à un phénomène de décélération. Un article de recherche récent [18] présente des preuves observationnelles de ce phénomène, connu sous le nom de *friction dynamique*. Les auteurs concluent que cela soutient l'hypothèse de l'existence d'un halo de matière noire, qui, selon eux, explique cette décélération. Néanmoins, une interprétation alternative reste plausible. Notre étude peut être vue comme fournissant un argument en faveur de l'idée que la décélération résulte de l'interaction entre la masse de la galaxie et l'environnement de masse négative qui la confine.

NB :

- Le *moment cinétique* est une propriété physique qui décrit la rotation d'un objet. Pour une galaxie, cela signifie la manière dont elle tourne dans l'espace. L'*évolution du moment cinétique* indique qu'au fil du temps, la façon dont la galaxie tourne change. Cela peut être dû à plusieurs facteurs, tels que les interactions gravitationnelles avec d'autres galaxies ou son environnement de masses négatives, les mouvements internes des étoiles, ou même la formation de nouvelles structures à l'intérieur de la galaxie.

- La *courbe de rotation* d'une galaxie montre comment la vitesse de rotation

21. Cela signifie que toutes les parties de l'objet tournent à la même vitesse, comme une toupie. Mais la courbe de rotation réelle de la galaxie diffère de ce modèle simple de corps solide. Autrement dit, la vitesse de rotation de la galaxie varie à différentes distances du centre, ce qui est typique pour les galaxies réelles.

varie à différentes distances de son centre. Typiquement, on s'attendrait à ce que les parties éloignées de la galaxie tournent plus lentement que les parties proches du centre, un peu comme les planètes dans notre système solaire - plus elles sont éloignées du soleil, plus leur vitesse orbitale est lente.

— Un phénomène de *friction dynamique* existe au sein de la galaxie. Il s'agit d'un processus qui se produit lorsqu'un objet massif, comme une étoile ou un groupe d'étoiles, se déplace à travers un champ de matière dense composé de gaz et d'étoiles dans une galaxie. En se déplaçant, cet objet massif attire la matière environnante en raison de la gravité. Cette matière tire en retour sur l'objet, le ralentissant progressivement. Imaginez courir à travers une foule. Même si les gens ne vous arrêtent pas directement, leur présence ralentit votre mouvement. C'est une analogie simple de la friction dynamique. Lorsque de nombreux objets dans une galaxie subissent une friction dynamique, cela peut ralentir la rotation générale de la galaxie. Ce ralentissement n'est généralement pas uniforme ; il peut affecter différentes parties de la galaxie de manière différente, en fonction de la distribution de la matière et des mouvements des étoiles et d'autres objets.

Chapitre 5

Contribution à la Cosmologie & à la Physique des Particules

5.1 Introduction aux Groupes Dynamiques

La Théorie des Systèmes Dynamiques est une discipline mathématique axée sur l'analyse des évolutions au fil du temps de différents systèmes en prenant en compte les conditions initiales et les influences externes. *La Géométrie Symplectique*, qui fusionne des aspects de la théorie des systèmes dynamiques avec ceux de la géométrie différentielle, se penche sur les propriétés et les déformations des espaces courbes sous l'action de forces extérieures. Ce domaine, fondé sur les principes de la mécanique hamiltonienne, explore des structures nommées *"variétés symplectiques"*, dotées d'une configuration singulière utile pour mesurer les volumes. À la différence de la géométrie riemannienne qui se sert d'un tenseur métrique pour évaluer longueurs et angles, la géométrie symplectique emploie une forme mathématique, la *"forme symplectique"*, pour le calcul des superficies.

Jean-Marc Souriau a été un pionnier de premier plan en géométrie topologique symplectique. Il a développé le concept de quantification géométrique, transformant des quantités physiques fondamentales telles que l'énergie et la quantité de mouvement en objets purement géométriques. Le travail de Souriau a donné une signification physique à l'inversion de la flèche du temps dans notre modèle cosmologique ([9], [37]).

Qu'est-ce qu'un groupe ?

En termes mathématiques, il fait référence à certaines matrices agissant sur d'autres matrices. Mais physiquement, que représente cela ?

Selon J-M Souriau, un groupe est créé pour le transport, et la méthode de transport est plus significative que l'entité transportée : *"Dites-moi comment vous vous déplacez, et je vous dirai qui vous êtes."*

Notre attention se porte principalement sur les groupes de Lie(voir [11]), qui sont à la fois des groupes et des variétés différentielles (des *"espaces courbes"* localement projetés sur un espace euclidien n-dimensionnel). Ils sont essentiels pour décrire les mouvements et les transformations dans l'espace. Deux groupes clés sont le groupe orthogonal O(3) et le groupe euclidien E(3) :

— **Le groupe orthogonal O(3)** est utilisé pour décrire les rotations et les symétries en trois dimensions, préservant les distances dans l'espace. Il comprend un sous-groupe crucial appelé SO(3), le groupe des rotations, qui gère les rotations autour d'un axe.
— **Le groupe euclidien E(3)** décrit les mouvements tridimensionnels tels que les rotations, les symétries et les translations. Basé sur le groupe orthogonal O(3), il peut être décomposé en une force et un couple appliqués à un objet en mécanique des solides. Il s'agit d'un groupe dans lequel le théorème de Pythagore peut être utilisé pour calculer la distance entre deux points. Ce groupe transforme un point avec des coordonnées x, y, z en un nouveau point avec des coordonnées x', y', z'. La caractéristique unique de ce groupe dynamique est sa capacité à générer une famille d'objets géométriques invariants au sein du groupe. Par exemple, une ligne soumise à une translation reste une ligne, en faisant un objet géométrique invariant unidimensionnel. Une sphère est un exemple parfait d'objet symétrique tridimensionnel. Sa propriété unique est qu'elle reste inchangée sous l'action d'une rotation autour de son centre, démontrant une symétrie de rotation. En termes géométriques, cela implique que lorsqu'une sphère effectue un mouvement de rotation, elle conserve ses propriétés géométriques de manière uniforme en chaque point. Dans le domaine de la physique, en particulier dans l'étude de l'espace-temps en relativité générale, la solution de Schwarzschild est un concept important. Elle décrit le champ gravitationnel à l'extérieur d'une masse sphériquement symétrique et non rotative telle qu'une étoile. La métrique de Schwarzschild, solution des équations de champ d'Einstein, est invariante sous l'action de rotations et de translations dans le temps et l'espace, ressemblant à l'invariance observée en géométrie euclidienne mais appliquée à l'espace-temps courbé de la relativité générale. Dans l'espace-temps de Schwarzschild, les géodésiques sont déterminées par la courbure de l'espace-temps, qui est décrite par la métrique de Schwarzschild. Pour un objet se déplaçant le long d'une géodésique, certaines quantités comme son moment angulaire et son énergie par rapport à la masse causant la courbure de l'espace-temps sont conservées. Cette conservation est le résultat des symétries de l'espace-temps, analogues aux lois de conservation en mécanique classique.

Les groupes de Lie décrivent donc les mouvements dans l'espace tout en préservant les distances et les longueurs. Ce sont des groupes d'isométrie lorsque les propriétés géométriques des objets en mouvement restent inchangées (distances et angles) dans l'espace lors d'une transformation. Les rotations sont des exemples de symétries de l'espace tridimensionnel, car elles n'altèrent pas les propriétés géométriques de l'espace. Par exemple, faire tourner un cube ne modifie pas les distances entre ses sommets. En d'autres termes, les propriétés géométriques de l'objet restent inchangées, même si sa position a été modifiée.

Selon la théorie de la relativité restreinte, au lieu de vivre dans un espace euclidien tridimensionnel $[x, y, z]$ avec une signature $(+\,+\,+)$ où le temps est une entité distincte, nous existons en réalité dans un espace-temps à quatre dimensions où les trois dimensions spatiales sont perpendiculaires à une dimension temporelle $[t, x, y, z]$ appelé espace de Minkowski dont la signature est $(-\,+\,++)$.

Le groupe de Poincaré, associé à cet espace, joue un rôle crucial dans la description des mouvements dans l'espace-temps de la relativité restreinte. Ce groupe permet de modéliser des comportements spécifiques, notamment ceux de particules sans masse telles que les photons, qui se déplacent invariablement à la vitesse de la lumière. Bien que leur vitesse demeure constante, la gravité affecte leur énergie, ce qui se manifeste dans des phénomènes tels que le décalage vers le rouge gravitationnel. Par ailleurs, le groupe de Poincaré s'applique aussi aux particules de masse non nulle, chacune obéissant à ses propres dynamiques dictées par les principes de la relativité. Ce groupe dynamique appliqué à la relativité restreinte, inclut le mouvement de masses ou de photons avec une possible inversion de la flèche du temps [1], et peut être représenté sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.1.1}$$

où L représente la matrice du groupe de Lorentz ($\mathcal{L}or$) qui décrit comment les coordonnées d'espace-temps changent entre différents référentiels inertiels. Ces transformations incluent les rotations dans l'espace ainsi que les transformations de Lorentz (boosts), qui sont des changements de référentiels en mouvement à une vitesse constante l'un par rapport à l'autre. C est un vecteur correspondant aux translations spatio-temporelles dans $\mathbb{R}^{1,3}$.

En effet, la moitié des éléments du groupe dynamique inversent le temps, ce qui signifie que si nous considérons un élément espace-temps comme une masse ou un photon et que nous appliquons un mouvement temporel du passé vers le futur, nous pouvons réaliser le même mouvement dans le sens inverse en utilisant le groupe de Poincaré. Par conséquent, selon la théorie de Souriau issue de son travail *"Structure of Dynamic Systems"* ([37]), si le groupe dynamique peut faire circuler des photons ou des masses avec une flèche du temps en opposition, alors leur énergie, et donc leur masse, peut également être inversée.

N.B. : Le groupe de Poincaré restreint gère exclusivement les mouvements relativistes *"orthochrones"* en quatre dimensions de l'espace de Minkowski, passant du passé au futur. Sa forme matricielle inclut la matrice L_o du groupe de Lorentz *"orthochrone"* $\mathcal{L}or_o$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} L_o & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.1.2}$$

Peut-on maintenant considérer ces mouvements avec une énergie et une masse négatives et une flèche du temps opposée comme faisant partie de la Physique ? Peuvent-

1. Du passé vers le futur et vice versa.

ils être mesurés ou observés ?

Les particules avec une énergie négative émettent des photons d'énergie négative, elles ne peuvent donc pas être observées ni mesurées optiquement. Cependant, il a été observé et mesuré que l'expansion de l'univers s'accélère en raison de la pression négative liée à l'énergie noire ([51]). En effet, la pression est une densité d'énergie par unité de volume.

Ainsi, l'expansion de l'univers est directement liée à l'énergie négative. Cela suggère qu'une partie substantielle de l'univers, actuellement définie comme de l'énergie noire, affecte cette expansion par le biais de l'effet gravitationnel. Cette approche dynamique et géométrique fournit donc une réponse à son origine et à sa nature. Elle pourrait contenir des masses ou des photons chargés d'énergie négative.

5.2 Diverses Symétries Associées à Chaque Opérateur d'Inversion

Le groupe de Poincaré restreint gère les mouvements relativistes en quatre dimensions de l'espace de Minkowski. Le groupe de Poincaré est le groupe défini selon la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.2.1}$$

où C est le vecteur correspondant aux translations spatio-temporelles dans $\mathbb{R}^{1,3}$:

$$C = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \tag{5.2.2}$$

Il agit sur les points de l'espace de Minkowski selon :

$$\xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{5.2.3}$$

Ce groupe de Lie à 10 paramètres indépendants [2] est le groupe d'isométrie de cet espace, défini par sa métrique :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \tag{5.2.4}$$

Le groupe de Lorentz $\mathcal{L}or$ possède quatre composantes connexes :

2. Inclut les 6 paramètres indépendants du groupe de Lorentz (3 rotations et 3 boosts) et 4 transformations indépendantes qui sont les translations suivant les 4 directions de l'espace de Minkowski.

— $\mathcal{L}or_n$ la composante neutre, n'inverse ni l'espace ni le temps et se définit par :

$$\mathcal{L}or_n = \{L \in \mathcal{L}or,\ \det(L) = 1\ \wedge\ [L]_{00} \geq 1\}$$

— $\mathcal{L}or_s$ inverse l'espace et se définit par :

$$\mathcal{L}or_s = \{L \in \mathcal{L}or,\ \det(L) = -1\ \wedge\ [L]_{00} \geq 1\}$$

— $\mathcal{L}or_t$ inverse le temps mais pas l'espace et se définit par :

$$\mathcal{L}or_t = \{L \in \mathcal{L}or,\ \det(L) = 1\ \wedge\ [L]_{00} \leq -1\}$$

— $\mathcal{L}or_{st}$ inverse à la fois l'espace et le temps et se définit par :

$$\mathcal{L}or_{st} = \{L \in \mathcal{L}or,\ \det(L) = -1\ \wedge\ [L]_{00} \leq -1\}$$

Et on obtient :

$$\mathcal{L}or = \mathcal{L}or_n \sqcup\ \mathcal{L}or_s \sqcup\ \mathcal{L}or_t \sqcup\ \mathcal{L}or_{st} \tag{5.2.5}$$

Les deux premières composantes sont regroupées pour former le sous-ensemble appelé *"orthochrone"* :

$$\mathcal{L}or_o = \mathcal{L}or_n \sqcup\ \mathcal{L}or_s \tag{5.2.6}$$

Il inclut la *symétrie P*, ce qui ne pose aucun problème aux physiciens qui savent qu'il existe des photons d'*"hélicité droite et gauche"* dont les mouvements sont dérivés de cette symétrie. Cela correspond au phénomène de polarisation de la lumière.

Les deux dernières composantes forment le sous-ensemble *"antichrone"* ou *"rétrochrone"*, dont les composantes inversent le temps :

$$\mathcal{L}or_a = \mathcal{L}or_t \sqcup\ \mathcal{L}or_{st} \tag{5.2.7}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\mathcal{L}or = \mathcal{L}or_o \sqcup\ \mathcal{L}or_a \tag{5.2.8}$$

Notons que :

$$\mathcal{L}or_t = -\mathcal{L}or_s \quad \mathcal{L}or_{st} = -\mathcal{L}or_n \tag{5.2.9}$$

Le *groupe de Poincaré* hérite des propriétés du groupe de Lorentz et possède donc quatre composantes connexes, il est défini par :

$$\mathcal{P}oin := \left\{ \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L \in \mathcal{L}or \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{5.2.10}$$

5.3 Groupe Dynamique de Lorentz

L'application de l'action coadjointe d'un groupe dynamique sur le dual de son algèbre de Lie, initiée par le mathématicien Jean-Marie Souriau, a éclairé certains aspects de l'approche suivie en physique. Le groupe dynamique de Lorentz restreint, limité à ses deux composantes orthochrones, traduit, à travers ses propriétés d'invariance résultantes, des aspects de la relativité restreinte. En 1970, J-M Souriau a établi que l'analyse des composantes de son moment met en évidence la nature géométrique d'un spin ([76] [78]). Le groupe de Lorentz possède deux composantes orthochrones connexes, à savoir sa première composante neutre, contenant l'élément neutre du groupe, et sa deuxième composante énantiomorphe, inversant l'espace synonyme de la *symétrie* P. Dans la théorie des groupes dynamiques, une classification en termes de mouvements devient évidente. À ce stade, l'action de ces éléments inversant l'espace est illustrée dans le phénomène de la polarisation de la lumière, où tout photon *"droit"* peut être converti en un photon *"gauche"*. Ce groupe peut être représenté par une famille de matrices L de dimension 4×4, définies axiomatiquement par $L^T GL = G$, où L^T est la transposée de la matrice de Lorentz L, et G est la matrice métrique de Minkowski, souvent appelée matrice de Gram dans ce contexte. En relativité restreinte, elle est généralement représentée par une matrice diagonale avec des éléments $\mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Cette équation signifie que la transformation de Lorentz préserve le produit scalaire de Minkowski, condition cruciale pour la cohérence de la théorie de la relativité restreinte.

5.4 Groupe Dynamique de Poincaré Restreint

Le produit du groupe de Lorentz avec le groupe de translation spatio-temporelle nous permet de construire le groupe dynamique de Poincaré restreint, toujours limité à ses deux composantes orthochrones. Dans son moment, nous trouvons d'abord l'énergie liée au sous-groupe des translations temporelles. Ensuite, l'impulsion, liée aux translations spatiales, les deux étant reliées par l'invariance du module du quadri-vecteur énergie-impulsion sous l'action du groupe de Lorentz. La matrice associée à ce groupe doit inclure la matrice de Lorentz *"orthochrone"* L_o de dimension 3×3, ainsi que le vecteur de translation C et des composantes supplémentaires pour compléter sa structure (voir 5.1.2).

5.5 Groupes Dynamiques de Kaluza & Janus Restreints

En ajoutant une translation le long d'une cinquième dimension au groupe de Poincaré restreint, nous formons un groupe de Lie auquel nous donnerons le nom de *Groupe de Kaluza Restreint* ([6], [8], [9], [37], [39]). Ce groupe n'est pas le groupe de Kaluza à 15 paramètres indépendants associé à une variété lorentzienne à 5 dimensions, mais un nouveau groupe à 11 paramètres indépendants, incluant un paramètre de translation en plus des 10 paramètres du groupe de Poincaré. Cette nouvelle dimension confère à l'impulsion, un scalaire supplémentaire de nature purement géométrique qui peut être identifié à la charge électrique q, positive, négative ou nulle. Nous mettons alors en évidence la translation géométrique selon un scalaire ϕ en dotant les masses d'une charge électrique invariante. Ensuite, en introduisant une nouvelle symétrie reflétant l'inversion de la cinquième dimension, synonyme d'inversion du scalaire de q à $-q$, nous doublons le nombre de ses composantes connexes de 2 à 4. L'action sur le moment lie ensuite cette nouvelle symétrie à l'inversion de la charge électrique q. Nous déduisons ainsi la modélisation géométrique de la conjugaison de charge ou de la *Symétrie C*, qui traduit la symétrie *"Matière-Antimatière"* introduite par Dirac. Il est alors logique de nommer cette nouvelle extension le *Groupe Janus Restreint.*

5.6 Groupe Dynamique Janus

En introduisant une nouvelle symétrie au groupe précédent, que nous décrivons comme *Symétrie T* et qui convertit la matière en antimatière à masse négative[3], nous construisons le *Groupe Dynamique Janus.* Ainsi, nous doublons le nombre de composantes connexes de quatre à huit, regroupées en deux sous-ensembles : *"orthochrones"*, conservant les propriétés temporelles et énergétiques, et *"antichrones"*, inversant le temps et l'énergie. Par conséquent, nous mettons en avant la translation géométrique consistant à doter les masses d'une charge électrique invariante. Comme l'a démontré Jean-Marie Souriau dès 1970, pionnier dans la théorie des groupes dynamiques ([76], [78]), cette approche a permis de conférer une nature purement géométrique à des éléments clés qui ont marqué les progrès de la physique relativiste.

Voici la matrice associée au Groupe Dynamique Janus à partir de laquelle il est possible de reconstruire tous les groupes de symétrie :

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} (-1)^{\mu} & 0 & \phi \\ 0 & T^{\lambda}S^{\nu}L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \lambda, \mu \in \{0,1\} \wedge\ \phi \in \mathbb{R} \wedge\ L \in \mathcal{L}or \wedge\ C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{5.6.1}$$

— ***Symétrie P*** :
En appliquant $\mu = 0$, $\lambda = 0$ et $\nu = 1$, nous obtenons :

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \phi \in \mathbb{R} \wedge\ L_s = SL_n \in \mathcal{L}or \wedge\ C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{5.6.2}$$

Cet opérateur de symétrie correspond à l'inversion de l'espace, où un élément de la deuxième composante connexe du groupe orthochrone est considéré. C'est cette symétrie qui inverse l'hélicité d'un photon, transformant un *"photon droit"* en un *"photon gauche"*, ce qui correspond au phénomène de la polarisation de la lumière.

— ***Symétrie C*** :
Nous devons appliquer $\mu = 1$, $\lambda = 0$ et $\nu = 0$.
En partant de l'élément L_n du groupe de Lorentz restreint orthochrone, en inversant la cinquième dimension portant la charge électrique q, nous obtenons l'opérateur *"Symétrie C"* ou *"conjugaison de charge"* (quantique) tel

3. Un concept que nous pourrions appeler *antimatière au sens de Feynman*

que :

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \phi \in \mathbb{R} \wedge \ L_n \in \mathcal{L}or \wedge \ C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{5.6.3}$$

C'est cette symétrie qui représente la transformation *"Matière-Antimatière"*.

— ***Symétrie T*** :
En appliquant $\mu = 0$, $\lambda = 1$ et $\nu = 0$, nous supprimons la *symétrie C* ($\mathcal{J}an_{11} = 1$) et la *symétrie P* ($\mathcal{J}an_{22} = -L_s$). Nous obtenons ainsi :

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \phi \in \mathbb{R} \wedge \ L_s = -L_t = -TL_n \in \mathcal{L}or \wedge \ C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{5.6.4}$$

— ***Symétrie CP*** :
En appliquant $\mu = 1$, $\lambda = 0$ et $\nu = 1$, nous ajoutons la *symétrie C* ($\mathcal{J}an_{11} = -1$) et la *symétrie P* ($\mathcal{J}an_{22} = L_s$) de manière à obtenir :

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \phi \in \mathbb{R} \wedge \ L_s = SL_n \in \mathcal{L}or \wedge \ C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{5.6.5}$$

NB : On peut également la déduire en supprimant la *symétrie T* ($\mathcal{J}an_{22} = L_s$) de la *symétrie CPT* suivant cette opération : $\mathbf{CP} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{CPT}$

— ***Symétrie CPT*** :
Nous devons appliquer $\mu = 1$, $\lambda = 1$ et $\nu = 1$.
Nous savons que l'élément L_n du groupe neutre n'inverse ni le temps ni l'espace, donc l'élément $\mathcal{J}an_{22} = -L_n$ inverse à la fois l'espace et le temps pour former l'opérateur de *symétrie PT*. Cependant, si nous ajoutons la *symétrie C* ($\mathcal{J}an_{11} = -1$), nous formons le *groupe Janus CPT avec une symétrie de charge* tel que :

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \phi \in \mathbb{R} \wedge \ L_n = -TSL_n \in \mathcal{L}or \wedge \ C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{5.6.6}$$

— ***Symétrie PT*** :
Nous devons appliquer $\mu = 0$, $\lambda = 1$ et $\nu = 1$.

En supprimant la *symétrie* C ($\mathcal{J}an_{11} = 1$) de la *symétrie* CPT suivant cette opération : $\mathbf{PT} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{CPT}$ nous obtenons :

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \phi \in \mathbb{R} \wedge \; L_n = -TSL_n \in \mathcal{L}or \wedge \; C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{5.6.7}$$

— ***Symétrie CT*** :
Nous devons appliquer $\mu = 1$, $\lambda = 1$ et $\nu = 0$.
En supprimant la *symétrie* P ($\mathcal{J}an_{22} = -L_s$) de la *symétrie* CPT suivant cette opération : $\mathbf{CT} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{CPT}$ nous obtenons :

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \phi \in \mathbb{R} \wedge \; L_s = -TL_n \in \mathcal{L}or \wedge \; C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{5.6.8}$$

— ***Opérateur Neutre*** :
En appliquant $\mu = 0$, $\lambda = 0$ et $\nu = 0$, l'objet se déplace à travers les cinq dimensions sans changer sa nature. Seul l'élément neutre du sous-groupe *"orthochrone"* est considéré ($\mathcal{J}an_{22} = L_n$). Nous obtenons ainsi :

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \phi \in \mathbb{R} \wedge \; L_n \in \mathcal{L}or \wedge \; C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{5.6.9}$$

Il est important de noter que Feynman considère que l'application de la *symétrie* PT aux mouvements des particules conduit à la création d'antimatière par l'application de la *symétrie* C. Par conséquent, la *symétrie* PT est équivalente à la *symétrie* C, c'est-à-dire qu'une particule de matière *"vue dans un miroir"* et se déplaçant "*à rebours*" dans le temps est de l'antimatière.

Cette perspective découle du travail de Weinberg, *"La théorie quantique des champs"* dans la Section 2.6, intitulée *"Inversion de l'espace et renversement du temps"* ([85]). En effet, un choix arbitraire est appliqué pour l'opérateur d'inversion T, ce qui fait que l'opérateur CPT devient l'identité.

Ainsi, étant donné que $\mathbf{CPT} = \mathbf{I}$, il s'ensuit que $\mathbf{PT} = \mathbf{PT} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{PT} \cdot \mathbf{CPT} = \mathbf{C}$. Par conséquent, le point de vue de Feynman repose principalement sur la mécanique quantique, où les théoriciens quantiques font des choix a priori entièrement arbitraires concernant les opérateurs P et T, contraints par la *"nécessité d'éviter l'émergence d'états d'énergie négative (considérés comme non-physiques)"*. Par conséquent, l'opérateur P doit être linéaire et unitaire, et l'opérateur T anti-linéaire et anti-unitaire. Et pour conclure en ajoutant à la page 104 que : *"On ne connaît aucun exemple de particules fournissant des représentations non conventionnelles des inversions, donc ces possibilités ne seront pas explorées davantage ici. Désormais, on supposera que les inversions ont l'action conventionnelle décrite dans la Section 2.6"*.

Les états d'énergie négative (associés à une pression négative) existent car ils sont responsables de l'accélération de l'expansion cosmique, comme en témoigne le travail récompensé par le prix Nobel de Perlmutter en 2011 ([51]). Cependant, à l'époque de l'émergence de la théorie quantique des champs, ce phénomène n'était pas encore connu.

Par conséquent, pour Feynman, la présence de l'opérateur d'inversion du temps T dans sa *symétrie* PT globale ne conduit pas à l'inversion de la masse, mais transforme la matière en antimatière de masse positive par inversion de charge via la *symétrie* C.

Dans la perspective du groupe Janus, en partant du mouvement d'une particule de masse positive dans l'espace à 5 dimensions, la *symétrie* C (portée par l'inversion de la cinquième dimension) transforme cette particule (ce mouvement) en une antiparticule de masse positive que l'on peut appeler une *"antiparticule de type Dirac"*, similaire à celle produite en laboratoire et qui a récemment été démontrée comme se comportant de la même manière que la matière ordinaire sous l'influence de la gravité ([5]).

D'autre part, la transformation PT-symétrique appliquée à une particule produit une antiparticule avec une énergie et une masse négatives, due à la *symétrie* T, que l'on peut appeler une *"antiparticule de type Feynman"*, correspondant à l'antimatière primordiale située entre les galaxies et que l'on trouve notamment sous forme de conglomérats dans le *Répulseur du Dipôle* ([35]). L'équivalence $PT = C$, selon Feynman, n'est alors plus applicable.

5.7 Implications

Les contributions significatives de cette étude affectent principalement les domaines de la mécanique quantique et de la cosmologie :

— **En mécanique quantique**, un aspect notable est l'inversion de l'énergie de certains objets. Une question intrigante se pose concernant la faisabilité d'objets ayant des états d'énergie négative en mécanique quantique. En abordant la *symétrie* T, les physiciens quantiques adoptent traditionnellement une perspective anti-linéaire et anti-unitaire pour l'opérateur T, dans le but d'exclure les états d'énergie négative, qui ne sont généralement pas considérés comme intrinsèques à la physique. De manière similaire, un opérateur P est choisi comme étant unitaire et linéaire pour des raisons analogues (voir [85]). Ces choix sous-tendent le théorème CPT, renforçant l'idée que la *symétrie* PT s'aligne avec la *symétrie* C. Au contraire, l'adoption d'un opérateur T

linéaire et unitaire révèle que les états d'énergie négative sont un résultat naturel dans les équations de Schrödinger et de Dirac (voir [22]), ouvrant la voie à de nouveaux terrains de recherche. De plus, les observations cosmologiques ont confirmé que l'expansion de l'univers s'accélère, attribuée à une pression négative associée à l'énergie noire, comme l'a démontré le travail de Perlmutter récompensé par le prix Nobel en 2011. Puisque la pression représente une densité d'énergie par unité de volume, ce phénomène est directement lié à l'influence de l'énergie négative sur l'expansion de l'univers.

— **Dans le domaine de la cosmologie**, la relativité générale rejette fermement le concept de masses négatives, invoquant l'émergence du phénomène de fuite et des conflits avec les principes d'action-réaction et d'équivalence (voir [10]). Par conséquent, tout nouveau modèle proposant l'intégration d'états d'énergie et de masse négatifs nécessiterait une extension du cadre géométrique fondamental de la relativité. La théorie des groupes dynamiques, centrée autour de divers groupes tels que Lorentz, Poincaré ou Kaluza, fournit un cadre pour décrire un univers dépourvu de forces, caractérisé par une structure plate et non courbée. Dans un tel univers, les particules suivent les géodésiques de l'espace de Minkowski dans une métrique lorentzienne ou naviguent dans un espace fibré influencé par une cinquième dimension, qu'elle soit ouverte ou fermée. Cette approche théorique suggère la coexistence de deux types distincts de matière, existant en isolation sans interaction mutuelle. Ainsi, les particules dans ces espaces n'interagissent pas les unes avec les autres. Cette perspective innovante ouvre de nouvelles voies pour comprendre les interactions entre particules dans l'espace-temps.

5.8 Annexe

Dans la théorie des groupes dynamiques développée par J.M. Souriau en 1970, la connexion entre la structure géométrique et le contenu physique d'un système est explorée à l'aide de groupes dynamiques spécifiques ([76],[78]). Ces groupes dynamiques décrivent les symétries et les transformations qui préservent les propriétés géométriques du système. En étudiant la nature du groupe dynamique associé à un système physique donné, nous pouvons déterminer les relations entre la géométrie et les quantités physiques associées.

Chaque mouvement d'un objet dans l'espace-temps possède son moment. Cependant, cela n'est pas synonyme d'*instant* ou des concepts physiques de moment linéaire ou angulaire. Le terme *moment* en théorie des groupes se réfère au mouvement, c'est-à-dire un déplacement physique entre des points dans l'espace.

Pour déterminer ce moment, il est nécessaire de définir d'abord ce qu'est une action de groupe. Il s'agit de la manière dont un groupe de matrices peut agir par multiplication sur un autre groupe de matrices afin de gérer, par exemple dans le groupe euclidien, les rotations, symétries et translations en une seule opération.

Mais J.M. Souriau a découvert qu'un groupe peut également agir sur les moments, générant à son tour un nouvel espace géométrique. Ainsi, il peut exister une autre action du groupe sur un autre espace. En fait, il existe un espace où les mouvements sont inscrits : l'espace-temps. Dans l'espace-temps de Minkowski à quatre dimensions, un groupe agit sur un point de coordonnées t_1, x_1, y_1, z_1 pour donner un autre point de coordonnées t_2, x_2, y_2, z_2. Cependant, ce qui est inscrit dans l'espace-temps est seulement la trajectoire. Pourtant, le mouvement agit dans deux espaces, le second étant l'espace des paramètres de mouvement, que Souriau appelle l'espace des moments [4].

Action Coadjointe du Groupe de Poincaré sur son Espace des Moments

Considérons le mouvement d'un objet dans l'espace. Un tel mouvement est également défini par son moment μ. Le physicien peut alors appliquer un élément g, par exemple du groupe Galiléen, à ce moment μ. Cela produit un nouveau moment

4. L'approche de Souriau permet, grâce au groupe de Poincaré qui est le groupe d'isométrie de l'espace de Minkowski englobant le groupe de Lorentz (avec ses quatre composantes connexes), de faire apparaître les paramètres associés à chacun de ces mouvements, dont les points représentatifs appartiennent à un espace vectoriel, *l'espace des moments*. La dimension de celui-ci est égale à celle du groupe : dix. En effet, le groupe de Lorentz est formé des transformations qui préservent la forme quadratique de l'espace-temps. Il est constitué du groupe des transformations de Lorentz orthochrones et du groupe des translations. Les transformations du groupe de Lorentz orthochrones ont 6 degrés de liberté, tandis que le groupe des translations a 4 degrés de liberté. Cette structure mène à 10 paramètres indépendants du groupe de Poincaré. En les regroupant dans une matrice antisymétrique appelée *torseur*, on peut ainsi y définir les paramètres de l'espace des mouvements.

μ'. Cette action peut s'écrire comme suit :

$$\mu' = g \times \mu \times g^T \tag{5.8.1}$$

g^T représente la transposée de cette matrice, et μ est la matrice des moments. C'est une matrice antisymétrique de taille 5×5, c'est-à-dire que les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale ont des signes opposés. Les éléments de la diagonale principale sont égaux à zéro (qui est son propre opposé). Nous pouvons définir cette matrice de la manière suivante :

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x & -p_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y & -p_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z & -p_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 & -E \\ p_x & p_y & p_z & E & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8.2}$$

Par exemple, pour mieux comprendre ce que μ représente, cette matrice 5×5 peut être décomposée de la manière suivante :

— Une matrice M de dimension 4×4 donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8.3}$$

— Un vecteur énergie-impulsion P de dimension 4×1 donné par[5] :

$$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ E \end{pmatrix} \tag{5.8.4}$$

— Sa transposée, le vecteur ligne P^T de dimension 1×4 donné par :

$$P^T = \begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z & E \end{pmatrix} \tag{5.8.5}$$

Nous pouvons en déduire la forme plus compacte de μ de la manière suivante :

$$\mu = \begin{pmatrix} M & -P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8.6}$$

L'action coadjointe est l'action d'un groupe sur son espace de moments. Plus précisément, il s'agit de l'action d'un groupe de Lie sur l'espace vectoriel dual de son algèbre de Lie[6].

5. Nous précisons le mot *vecteur* pour indiquer la nature de la variable utilisée, afin de ne pas alourdir les expressions.

6. Le dual d'une algèbre de Lie, dans le contexte de la physique, est un espace mathématique composé de covecteurs. Ces covecteurs sont des entités mathématiques qui assignent des valeurs

Groupe de Poincaré

En Relativité Générale, le groupe de Poincaré régit le mouvement des particules matérielles relativistes (5.2.10) et peut être défini par le groupe de matrices [7] :

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \lambda L_o \in \mathcal{L}or \wedge \lambda = \pm 1 \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{5.8.7}$$

agissant sur l'espace de Minkowski selon :

$$g(X) = L.X + C \tag{5.8.8}$$

L'action du groupe sur son espace des moments est l'action sur le dual de l'algèbre de Lie du groupe. L'élément de l'algèbre de Lie est obtenu en différenciant les dix composantes du groupe. Souriau désigne par la lettre grecque Λ la différentielle de la matrice carrée Z représentant l'élément du groupe de Poincaré et par la lettre grecque Γ l'élément du sous-groupe des translations spatio-temporelles [8] :

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & \Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{\Lambda} = -\Lambda \wedge \Gamma \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{5.8.9}$$

Nous avons montré que la matrice des moments μ inclut des éléments ayant une interprétation physique, tels que le quadrivecteur P, où E représente l'énergie et $p = \{p_x, p_y, p_z\}$ le moment linéaire.

Toutefois, quelle est l'essence et la signification physique de cette matrice anti-symétrique M ?

Procédons à sa décomposition pour le découvrir :

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{pmatrix} \\ S &= \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y \\ l_z & 0 & -l_x \\ -l_y & l_x & 0 \end{pmatrix} \\ f &= \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.8.10}$$

scalaires à des vecteurs dans l'algèbre de Lie, représentant des grandeurs physiques qui ne possèdent pas de direction spécifique, telles que l'énergie ou la température. Les moments, dans ce contexte, sont des mesures qui décrivent comment les transformations associées à un groupe de Lie modifient l'algèbre de Lie elle-même. La représentation coadjointe est une méthode par laquelle un groupe agit sur le dual de son algèbre de Lie. Cette action permet d'examiner la transformation des covecteurs, comme les moments, sous l'influence du groupe. L'intérêt de cette approche réside dans sa capacité à révéler des informations sur les caractéristiques géométriques et physiques de systèmes étudiés, en analysant comment ces systèmes évoluent ou restent invariants sous les transformations du groupe.

7. (13.51) et (13.52) de [78]

8. (13.54) de [78]. Il écrit ensuite μ, élément de l'espace des mouvements, sous la forme (13.57) et exprime l'invariance sous la forme de la constance du scalaire (13.58), où M est une matrice antisymétrique.

Soit sous sa forme compacte :

$$M = \begin{pmatrix} S & f \\ -f^T & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8.11}$$

La vitesse V est implicitement intégrée dans la matrice L du groupe de Lorentz. Lorsqu'on examine un mouvement se déroulant dans une direction spécifique, par exemple le long d'un axe, avec une vitesse V et une translation $\Delta z = c$, et que $c = V\Delta t$, nous nous plaçons alors dans un système de coordonnées qui suit le mouvement de la particule le long de cette translation dans l'espace-temps. Dans ce contexte, le vecteur f s'avère être nul.

La matrice S peut alors s'exprimer de la manière suivante :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -s & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8.12}$$

Il s'agit du *spin* d'une particule. Comme Souriau l'a démontré en 1970, il présente une nature purement géométrique : il est représenté par une matrice antisymétrique de taille 3×3. La méthode de quantification géométrique qu'il a développée révèle que le spin ne peut être qu'un multiple entier de $\hbar$ (la constante de Planck réduite). Souriau a également exploré, dans [78], comment l'existence d'une charge électrique dans une particule suggère son déplacement dans un espace-temps doté d'une cinquième dimension de taille extrêmement réduite [9], similaire à la dimension de Kaluza, qui est bouclée sur elle-même telle un faisceau de fibres. Cette cinquième dimension, étant bouclée sur elle-même, pourrait conduire à la quantification géométrique de la charge électrique, grâce à une *"forme de fermeture"* dans l'espace-temps, permettant à un objet de redevenir identique à lui-même après une rotation de 360°. Cette caractéristique est fondamentale pour comprendre la quantification du spin.

La quantité $f = [f_x, f_y, f_z]$, désignée par Souriau comme le *"passage"*, s'annule dans le référentiel de la particule en mouvement et n'est perceptible que depuis un autre référentiel, illustrant un effet du mouvement [10].

La relation $C_m = f + pt$ établit un lien entre le passage f et la position du centre de masse C_m au temps $t = 0$.

Le moment galiléen complet se compose des éléments suivants :

$$\mu = \{\text{énergie, masse, quantité de mouvement, passage, spin}\}$$

9. La longueur de Planck

10. Par exemple, vous êtes assis dans un avion en vol à l'arrière de la cabine et on vous invite à vous déplacer vers l'avant. Vous ne pourrez passer que si *"vous empruntez un peu de passage"* à l'avion. Cela le fera dévier légèrement de son plan de vol initial. C'est la conservation du passage qui permet d'établir la règle suivante : Si un objet est en espace libre, son centre de masse se déplace en ligne droite, à vitesse constante, dans la direction de la quantité de mouvement à moins d'être perturbé par des forces externes telles que la gravité. Si la quantité de mouvement est nulle, le centre de masse est immobile.

Chaque mouvement d'un objet est caractérisé par son propre moment, qui ne peut être que transféré partiellement d'un objet à un autre, sans possibilité de création ou de disparition. Cela permet de mesurer le moment en transférant une partie du moment de l'objet vers l'instrument de mesure.

Il est important de noter que la masse (au repos) est considérée comme un paramètre du moment. Contrairement à la masse classique, qui était traitée comme une constante additive arbitraire dans le groupe de Galilée, la masse dans le groupe de Poincaré est définie comme la masse relativiste $m = \frac{E}{c^2}$, et varie donc avec la vitesse. Ce traitement diffère également du groupe dynamique non relativiste par l'absence de décomposition barycentrique [11], une caractéristique du groupe de Galilée résultant de l'existence d'un sous-groupe privilégié absent dans le groupe de Poincaré [12]. Tout mouvement virtuel peut être interprété comme un mouvement réel par changement de référentiel [13]. Le groupe de Poincaré décrit ainsi les propriétés des particules élémentaires en utilisant uniquement deux paramètres physiquement interprétables : la masse au repos et le spin [14].

Pour les particules sans masse telles que les photons, l'hélicité, en plus de la polarisation (linéaire ou elliptique), est également cruciale. L'hélicité du photon, pouvant prendre les valeurs ± 1, correspond respectivement à une polarisation circulaire gauche (PCG) et à une polarisation circulaire droite (PCD). L'hélicité d'une particule est déterminée par l'orientation de son spin par rapport à son vecteur de mouvement.

Maintenant que nous avons exposé les principaux outils, nous pouvons montrer l'action coadjointe du groupe de Poincaré sur son espace des moments.

Nous savons que l'action coadjointe est l'action d'un groupe de Lie sur l'espace vectoriel dual de son algèbre de Lie.

Ainsi, en appliquant l'action du groupe de Poincaré sur le dual de son algèbre de Lie, c'est-à-dire sur son espace des moments, nous obtenons l'action suivante à partir de 5.8.1 :

$$\mu' = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M & -P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L^T & 0 \\ C^T & 1 \end{pmatrix} \tag{5.8.13}$$

11. Le concept de décomposition barycentrique fait référence à la capacité de séparer le mouvement d'un système en un mouvement du centre de masse et des mouvements relatifs des particules autour de ce centre.

12. Comme nous l'avons déjà étudié, le groupe de Galilée régit les transformations entre les référentiels inertiels. Une caractéristique importante du groupe de Galilée est la possibilité d'identifier un centre de masse (ou barycentre) pour un système de particules, qui se comporte de manière simple sous ces transformations. En relativité restreinte, le concept de centre de masse n'est pas aussi simple ou universel que dans la mécanique classique, car la définition du centre de masse dépend du référentiel d'observation.

13. En relativité restreinte, ce qui peut apparaître comme un mouvement purement hypothétique dans un référentiel peut être observé comme un mouvement physique concret dans un autre.

14. ou moment angulaire intrinsèque

$$\mu' = \begin{pmatrix} LML^T - LPC^T + CP^TL^T & -LP \\ P^TL^T & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8.14}$$

Par identification avec 5.8.6, nous pouvons en déduire que [15] :

$$M' = LML^T - LPC^T + CP^TL^T \quad \text{et} \quad P' = LP \tag{5.8.15}$$

Quelle est alors la signification des différentes composantes de l'espace des moments [16] ?

$$\mu = \{M, P\} = \{l, g, p, E\} \tag{5.8.16}$$

M est la matrice des moments associée à μ et P le vecteur énergie-impulsion. l est le moment angulaire de M, g est le barycentre relativiste de M, p est le moment linéaire de P et E est l'énergie de P.

Dans le chapitre 5 de [78], J.M. Souriau développe une méthode de quantification géométrique qui mène à la quantification du spin, considéré comme un attribut géométrique [17].

$$s = n\frac{\hbar}{2} \tag{5.8.17}$$

Nous obtenons ainsi une description des particules dans leur espace de moment, avec différentes valeurs de spin.

La masse est définie à la page 188 [18] comme suit :

$$m = \sqrt{P^T \cdot P}\ \mathrm{sgn}(E) \tag{5.8.18}$$

Inversion du Temps et de l'Énergie

Les éléments du groupe de Lorentz agissent sur des points de l'espace-temps qui constituent un mouvement. En faisant agir un élément L du groupe de Lorentz sur un mouvement donné, nous obtenons un autre mouvement.

Comme évoqué à travers l'expression 5.2.5, le groupe de Lorentz possède quatre composantes connexes.

La composante neutre $\mathcal{L}or_n$ est un sous-groupe contenant la matrice unitaire qui n'inverse ni l'espace ni le temps.

Considérons la matrice à 4 composantes ω constituées de deux paramètres λ_1 et λ_2 :

$$\omega_{(\lambda_1,\lambda_2)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \pm 1 \\ \lambda_2 = \pm 1 \end{cases} \tag{5.8.19}$$

15. (13.107) de [78]
16. (13.57) de [78]
17. (18.82) de [78]
18. (14.57) de [78]

Ainsi, les quatre composantes du groupe de Lorentz peuvent être facilement exprimées en utilisant les quatre combinaisons possibles de ces deux paramètres appliquées à sa composante neutre, dont un élément $L_n \in \mathcal{L}or_n$ est exprimé selon l'expression $L = \omega L_n$:

$$\omega_{(1,1)} \times L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}or_n \qquad \omega_{(1,-1)} \times L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}or_s$$
$$\omega_{(-1,1)} \times L_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}or_t \quad \omega_{(-1,-1)} \times L_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}or_{st} \tag{5.8.20}$$

Nous constatons que $\lambda_1 = -1$ inverse le temps tandis que $\lambda_2 = -1$ inverse l'espace. Les quatre composantes sont regroupées en deux sous-ensembles *"orthochrone"* et *"rétrochrone"* selon les expressions respectives 5.2.6 et 5.2.7.

Le groupe de Poincaré peut alors s'écrire selon ces quatre composantes connexes de la manière suivante :

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} \omega L_n & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \omega L_n \in \mathcal{L}or \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{5.8.21}$$

Ainsi l'action de ce groupe de Poincaré sur les coordonnées de l'espace-temps donne l'espace des mouvements suivants :

$$\begin{bmatrix} \omega L_n & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \xi \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega L_n \xi + C \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5.8.22}$$

Il s'agit en fait de l'action du groupe de Poincaré sur son espace des moments μ possédant dix scalaires indépendants :

— L'énergie E
— L'impulsion $p = \{p_x, p_y, p_z\}$
— Le passage $f = \{f_x, f_y, f_z\}$
— Le spin $s = \{l_x, l_y, l_z\}$

L'action du groupe de Poincaré sur le dual de son algèbre de Lie est l'action coadjointe sur son espace des moments M (passage f et spin s) et le vecteur énergie-impulsion P (énergie E et impulsion p), ce qui donne :

$$M' = (\omega L_n) M (\omega L_n)^T - (\omega L_n) P C^T + C P^T (\omega L_n)^T \quad \text{et} \quad P' = (\omega L_n) P \tag{5.8.23}$$

Pour mettre en évidence les effets des symétries P, T et PT sur $\{E, p, f, s\}$, nous choisirons l'action la plus simple possible, où il n'y a pas de translation dans l'espace-temps, de sorte que le vecteur **C** s'annule et $L_n = 1$ [19] :

$$M' = [\omega_{(\lambda_2,\lambda_1)}]M[\omega_{(\lambda_2,\lambda_1)}]^T \quad \text{et} \quad P' = [\omega_{(\lambda_2,\lambda_1)}]P \tag{5.8.24}$$

A présent, considérons par exemple la symétrie T, où il y a seulement une inversion du temps ($\lambda_1 = -1$), sans inversion de l'espace ($\lambda_2 = 1$), dans un cas où il n'y a également aucune translation dans l'espace-temps ($C = 0$). Nous avons donc :

$$\omega_{(1,-1)} \times L_n = L_t \tag{5.8.25}$$

D'où :

$$L_t \times \xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -t \end{pmatrix}. \tag{5.8.26}$$

Nous obtenons ainsi l'action de l'inversion du temps dans l'espace des trajectoires ou dans l'espace-temps.

Déterminons l'action coadjointe à savoir l'action du groupe sur son espace des moments d'après 5.8.10 :

$$M' = L_t M L_t^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.8.27}$$

D'où :

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y & -f_x \\ l_z & 0 & -l_x & -f_y \\ -l_y & l_x & 0 & -f_z \\ f_x & f_y & f_z & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8.28}$$

D'autre part, nous avons :

$$P' = L_t P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ -E \end{pmatrix} \tag{5.8.29}$$

Nous pouvons donc en déduire que l'application de la composante L_t du groupe de Lorentz au mouvement d'une particule induit une inversion de son énergie de E en $-E$ et de son passage de f en $-f$.

La symétrie T appliquée au mouvement d'une particule inverse donc son énergie (page 189–193 de [78]).

19. La matrice $\omega_{(\lambda_2,\lambda_1)}$ est ici exprimée selon une convention d'espace-temps 4D notée {x, y, z, t} au lieu de la convention de relativité habituelle {t, x, y, z} que nous utilisons partout ailleurs, afin de s'aligner avec les représentations graphiques et matricielles de M et P montrées précédemment.

On peut appliquer le même processus pour les 4 composantes connexes du groupe de Lorentz et nous découvririons que :

- Symétrie P : l'impulsion et le passage sont inversés. L'énergie et le spin restent inchangés.
- Symétrie T : l'énergie et le passage sont inversés. L'impulsion et le spin restent inchangés.
- Symétrie PT : l'impulsion et l'énergie sont inversées. Le passage et le spin restent inchangés.

Aucune transformation ne modifie le spin.

Groupe de Kaluza Restreint

Appliquons une extension du groupe de Poincaré pour former le groupe dynamique suivant :

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi \in \mathbb{R} \wedge L = \lambda L_o \in \mathcal{L}or \wedge \lambda = \pm 1 \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{5.8.30}$$

Partons de l'espace de Minkowski :

$$\xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} \tag{5.8.31}$$

Introduisons l'espace de Kaluza [20] qui intègre une matrice de Gram de dimension 5×5 :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.8.32}$$

Dans le groupe considéré, nous ajoutons juste une translation ϕ à la cinquième dimension ζ. Alors, la dimension du groupe devient 11 (section 5.5). Il est le groupe d'isométrie de l'espace de Kaluza, défini par sa métrique :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}X^T \Gamma \mathrm{d}X = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 - \mathrm{d}\zeta^2 \tag{5.8.33}$$

Avec :

$$X = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ \zeta \end{pmatrix} \tag{5.8.34}$$

20. L'espace de Kaluza est une variété riemannienne hyperbolique de signature $(+----)$

Selon le théorème de Noether[21], cette nouvelle symétrie est accompagnée de l'invariance d'un scalaire que nous appellerons q. Le torseur de ce groupe de Kaluza intègre alors un paramètre supplémentaire :

$$\mu = \{M, P, q\} = \{l, g, p, E, q\} \tag{5.8.35}$$

Introduisons l'action du groupe sur son algèbre de Lie :

$$Z' = g^{-1} Z g \tag{5.8.36}$$

Or, si on considère un élément de l'algèbre de Lie de ce groupe :

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & G\omega & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi' \\ 0 & G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8.37}$$

La matrice inverse de g[22] donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\phi \\ 0 & L^{-1} & -L^{-1}C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.8.38}$$

Et :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & G\omega & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & G\omega L & G\omega C + \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8.39}$$

Nous pouvons alors calculer 5.8.36 de la manière suivante :

$$Z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\phi \\ 0 & L^{-1} & -L^{-1}C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & G\omega & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.8.40}$$

Soit :

$$Z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\phi \\ 0 & L^{-1} & -L^{-1}C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & G\omega L & G\omega C + \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & L^{-1}G\omega L & L^{-1}G\omega C + L^{-1}\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8.41}$$

21. Le théorème de Noether établit que pour chaque symétrie continue d'une action physique, il existe une quantité conservée. Dans notre contexte, si une nouvelle symétrie assure l'invariance d'un scalaire q, ce scalaire est la quantité conservée. Cela signifie que q reste constant lorsque la symétrie est appliquée à l'action du système.

22. Par exemple, pour trouver l'inverse d'une matrice 2×2, on utilise la formule suivante lorsque la matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

L'inverse est :

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Donc :

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi' \\ 0 & G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & L^{-1}G\omega L & L^{-1}G\omega C + L^{-1}\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8.42}$$

Ainsi, par identification, nous pouvons en déduire :

$$\delta\phi' = \delta\phi \tag{5.8.43}$$

$$G\omega' = L^{-1}G\omega L \tag{5.8.44}$$

$$\gamma' = L^{-1}G\omega C + L^{-1}\gamma \tag{5.8.45}$$

Par conséquent, la relation de dualité [23] nous donne :

$$\frac{1}{2}T_r(M \cdot \omega) + P^T \cdot G\gamma + q\delta\phi = \frac{1}{2}T_r(M' \cdot \omega') + P'^T \cdot G\gamma' + q'\delta\phi' \tag{5.8.46}$$

Ce qui nous permet de déduire l'action du groupe suivant :

$$q' = q \tag{5.8.47}$$

$$M' = LML^T - LPC^T + CP^TL^T \tag{5.8.48}$$

$$P' = LP \tag{5.8.49}$$

Si on identifie q à la charge électrique, cela montrerait que le mouvement d'une particule massive dans un espace à cinq dimensions la transformerait en une particule électriquement chargée.

Groupe Janus Restreint

Considérons le groupe dynamique suivant :

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} \mu & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mu = \pm 1 \wedge \phi \in \mathbb{R} \wedge L = \lambda L_o \in \mathcal{L}or \wedge \lambda = \pm 1 \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{5.8.50}$$

L'action du groupe sur les coordonnées de l'espace-temps à 5 dimensions défini par 5.8.34 donne l'espace des mouvements suivants :

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\zeta + \phi \\ L\xi + C \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.8.51}$$

Un calcul similaire aux précédents permet d'obtenir l'action du groupe :

$$q' = \mu q \tag{5.8.52}$$

$$M' = LML^T - LPC^T + CP^TL^T \tag{5.8.53}$$

$$P' = LP \tag{5.8.54}$$

23. (13.58) de [78]

Ce groupe agit sur l'espace de Kaluza à cinq dimensions. Nous pouvons remarquer que $\mu = -1$ inverse la cinquième dimension ζ et le scalaire q.

Nous trouvons, à travers une interprétation dynamique du groupe, l'idée suggérée par J.M. Souriau [78] : l'inversion de la cinquième dimension est associée à l'inversion de la charge électrique. Mais celle-ci n'est que l'une des charges quantiques [24].

En effet, la *Symétrie C* traduisant la symétrie *"Matière-Antimatière"* introduite par Dirac, inverse toutes les charges quantique. Cette opération d'inversion ne s'obtient qu'en ajoutant autant de dimensions compactifiées qu'il y a de charges quantiques. L'action du groupe sur les coordonnées de l'espace-temps à n dimensions donnant l'espace des mouvements suivants :

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & \phi^1 \\ 0 & \mu & 0 & \cdots & 0 & \phi^2 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \mu & 0 & \phi^p \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L & C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^p \\ \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\zeta^1 + \phi^1 \\ \mu\zeta^2 + \phi^2 \\ \vdots \\ \mu\zeta^p + \phi^p \\ L\xi + C \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.8.55}$$

Le torseur de ce groupe intègre plusieurs scalaires supplémentaires q^p :

$$\mu = \{M, P, \sum_1^p q^i\} = \{l, g, p, E, q^1, q^2, \ldots, q^p\} \tag{5.8.56}$$

Ce qui nous permet d'obtenir l'action du groupe sur son espace des moments :

$$q'^1 = \mu q^1 \tag{5.8.57}$$
$$q'^1 = \mu q^1 \tag{5.8.58}$$
$$\ldots \tag{5.8.59}$$
$$q'^p = \mu q^p \tag{5.8.60}$$
$$M' = LML^T - LPC^T + CP^TL^T \tag{5.8.61}$$
$$P' = LP \tag{5.8.62}$$

De plus, Souriau considère que la charge électrique peut être géométriquement quantifiée suivant des valeurs discrètes $(+e, 0, -e)$, lorsque la cinquième dimension associée est fermée.

Imaginez que nous représentons le mouvement dans l'espace de Minkowski le long d'une ligne droite simple, orientée dans le temps. À chaque point, nous ajoutons une dimension fermée, qui étend l'espace de Minkowski en un faisceau. Dans la figure didactique 5.1, on le représente comme un cylindre.

24.

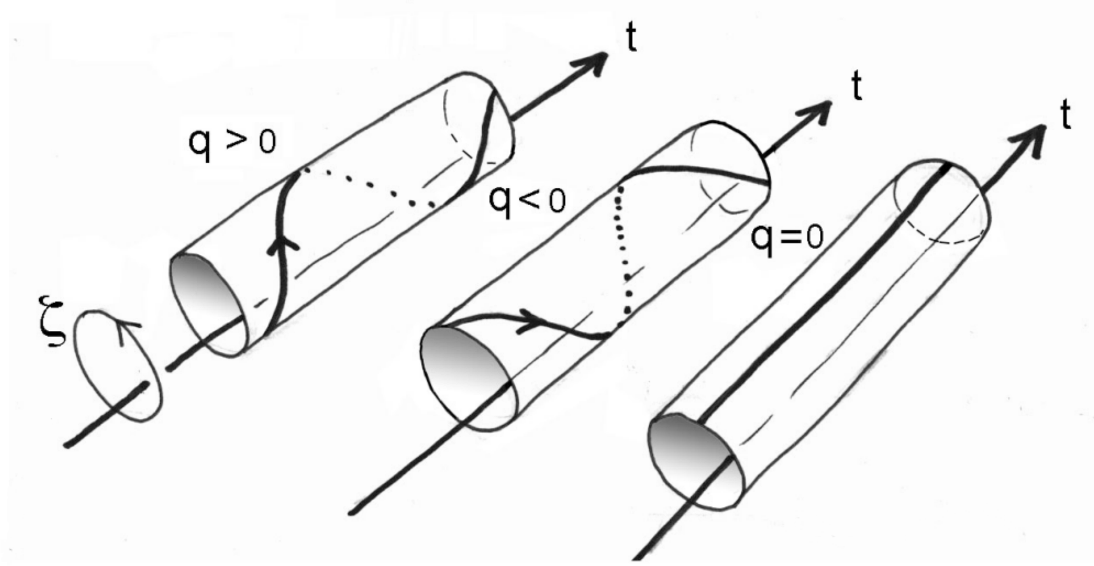


FIGURE 5.1 – Inversion de la direction d'enroulement du mouvement d'une particule traduisant la symétrie C

Groupe Dynamique Janus

Comme étudié dans la section 5.6, si on introduit une nouvelle symétrie au groupe précédent, que l'on peut qualifier de *Symétrie* PT permettant de convertir la matière en antimatière à masse négative [25], nous combinons ainsi les *Symétrie* C et PT pour former le *Groupe Dynamique Janus* [26] suivant :

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & \phi \\ 0 & \lambda L_o & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \{-1, 1\} \wedge \phi \in \mathbb{R} \wedge L_o \in \mathcal{L}or_o \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \tag{5.8.63}$$

Nous pouvons considérer que des particules de matière et d'antimatière peuvent cohabiter dans le même feuillet d'espace. En revanche, aucune cohabitation n'est possible pour le mouvement de particules déduit par T-symétrie (ou PT-symétrie).

Cet espace est de dimension $4 + p$ (pour p charges quantiques).

On envisagera donc le revêtement à deux feuillets de cette variété M_{n+p}.

Dans chacune de ces deux nappes subsistent une possibilité d'opérer la symétrie correspondant à $\mu = -1$ c'est à dire l'inversion de toutes les charges quantiques.

Autrement dit la dualité *"Matière-Antimatière"* existe dans les deux nappes.

25. Un concept que nous pourrions appeler *antimatière au sens de Feynman*
26. Dont la forme générale est donnée par 5.6.1

Pour comprendre la nature des différents composants de ces nappes, nous allons considérer le mouvement d'une particule de matière dotée d'une énergie et d'une masse :

— En faisant agir sur ce mouvement, des éléments du groupe correspondant à $(\lambda = 1; \mu = 1)$, nous obtiendrons d'autres mouvements de particules de matière de masse et d'énergie positive.

— En faisant agir sur ce mouvement, des éléments du groupe correspondant à $(\lambda = 1; \mu = -1)$, nous obtiendrons d'autres mouvements d'antiparticules de matière de masse et d'énergie positive [27].

— En faisant agir sur ce mouvement, des éléments du groupe correspondant à $(\lambda = -1; \mu = 1)$, nous obtiendrons d'autres mouvements de particules de matière de masse et d'énergie négative.

— En faisant agir sur ce mouvement, des éléments du groupe correspondant à $(\lambda = -1; \mu = -1)$, nous obtiendrons d'autres mouvements d'antiparticules de matière de masse et d'énergie négative [28].

Son groupe d'isométrie est celui de l'espace Janus, défini par la même métrique que celle structurant l'espace de Kaluza 5.8.33, et dont la dimension est de 11 [29]. Le torseur du groupe est également le même que 5.8.35.

Or, si on considère un élément de l'algèbre de Lie de ce groupe :

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & \lambda G\omega & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.8.64}$$

La matrice inverse de g (5.8.63) donnant :

$$\begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & \phi \\ 0 & \lambda L_o & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & -\lambda\mu\phi \\ 0 & \lambda L_o^{-1} & -\lambda L_o^{-1}C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.8.65}$$

Et :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & \lambda G\omega & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & \phi \\ 0 & \lambda L_o & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & \lambda^2 G\omega L_o & \lambda G\omega C + \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8.66}$$

Nous pouvons alors calculer 5.8.36 de la manière suivante :

$$Z' = \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & -\lambda\mu\phi \\ 0 & \lambda L_o^{-1} & -\lambda L_o^{-1}C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & \lambda^2 G\omega L_o & \lambda G\omega C + \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8.67}$$

27. Il s'agit de *l'"antimatière au sens de Dirac"* (C-symétrie).
28. Il s'agit de *l'"antimatière au sens de Feynman"* (PT-symétrie).
29. 10 + 1 dimension associée à la cinquième dimension d'espace ζ que J.M. Souriau identifie à la charge électrique q.

Soit :

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi' \\ 0 & \lambda G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\lambda\mu)\delta\phi \\ 0 & \lambda^3 L_o^{-1} G\omega L_o & \lambda^2 L_o^{-1} G\omega C + \lambda L_o^{-1}\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8.68}$$

Ainsi, par identification, nous pouvons en déduire :

$$\delta\phi' = \lambda\mu\delta\phi \tag{5.8.69}$$

$$\omega' = \lambda^2 G L_o^{-1} G\omega L_o \tag{5.8.70}$$

$$\gamma' = \lambda^2 L_o^{-1} G\omega C + \lambda L_o^{-1}\gamma \tag{5.8.71}$$

$$\tag{5.8.72}$$

Or :

$$L_o^{-1} = G L_o^T G \tag{5.8.73}$$

Donc [30] :

$$\begin{aligned} \delta\phi' &= \lambda\mu\delta\phi \\ \omega' &= \lambda^2 L_o^T \omega L_o \\ \gamma' &= \lambda^2 G L_o^T \omega C + \lambda G L_o^T G\gamma \end{aligned} \tag{5.8.74}$$

Or, inspiré par J.M. Souriau, nous pourrions ajouter autant de dimensions fermées supplémentaires que de charges quantiques et écrire le groupe dynamique de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & \phi^1 \\ 0 & \lambda\mu & 0 & \cdots & 0 & \phi^2 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \lambda\mu & 0 & \phi^p \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda L_o & C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.8.75}$$

Le groupe d'isométrie de cet espace peut être défini par la métrique suivante :

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2 - (\mathrm{d}\zeta^1)^2 - (\mathrm{d}\zeta^2)^2 - \ldots - (\mathrm{d}\zeta^p)^2 \tag{5.8.76}$$

Avec :

$$X = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^p \end{pmatrix} \tag{5.8.77}$$

30. GG=I

L'action de ce groupe Janus sur les coordonnées de l'espace-temps à $10 + p$ paramètres indépendants donne alors l'espace des mouvements suivants :

$$\begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & \phi^1 \\ 0 & \lambda\mu & 0 & \cdots & 0 & \phi^2 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \lambda\mu & 0 & \phi^p \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda L_o & C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^p \\ \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu\zeta^1 + \phi^1 \\ \lambda\mu\zeta^2 + \phi^2 \\ \vdots \\ \lambda\mu\zeta^p + \phi^p \\ \lambda L_o\xi + C \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.8.78}$$

Selon le théorème de Noether, cette nouvelle symétrie est accompagnée de l'invariance des scalaires additionnels q^p. Le torseur du groupe les intègre donc selon cette relation :

$$\mu = \{M, P, \sum_1^p q^i\} = \{l, g, p, E, q^1, q^2, \dots, q^p\} \tag{5.8.79}$$

Ainsi, la relation de dualité [31] nous donne :

$$\frac{1}{2}T_r(M \cdot \omega) + P^T \cdot G\gamma + \delta\phi \sum_1^p q^i = \frac{1}{2}T_r(M' \cdot \omega') + P'^T \cdot G\gamma' + \delta\phi \sum_1^p q'^i \tag{5.8.80}$$

Ce qui nous permet de déduire l'action du groupe par identification avec 5.8.74 :

$$\sum_1^p q'^i = \lambda\mu \sum_1^p q^i \tag{5.8.81}$$

$$M' = LML^T - LPC^T + CP^TL^T \tag{5.8.82}$$

$$P' = LP \tag{5.8.83}$$

31. (13.58) de [78]

Chapitre 6

Interprétation Alternative du Modèle de Trou de Ver Couplé à une Fontaine Blanche en tant que *Membrane à Sens Unique*

La métrique extérieure développée par K. Schwarzschild en 1916, en tant que solution à l'équation d'Einstein dans le vide, est invariante par symétrie temporelle $t \to -t$. Cette propriété, communément appelée "*staticité*", a conduit à l'élimination d'un terme croisé $\mathrm{d}r\mathrm{d}t$ dans la métrique. Ce terme croisé a été réintroduit plus tard par Arthur Eddington via un changement de variables pour montrer que la singularité à l'horizon est due à un mauvais choix de coordonnées ([24]). Dans un récent article [40] composé par Pascal Koiran, il a été démontré que dans les coordonnées d'Eddington, le temps de chute vers l'horizon se produit en temps fini *du point de vue d'un observateur distant.* Cette nouvelle étude vise à approfondir ce résultat ainsi que l'étude [25] d'Einstein et Rosen pour construire le modèle d'un *trou de ver* couplé à une *fontaine blanche* en tant que *membrane à sens unique*, reliant deux espaces semi-riemanniens *PT-symétriques* à travers un *pont* qui ne peut être traversé que dans un sens.

6.1 Solutions de l'Équation d'Einstein Reflétant Différentes Topologies

Nous commençons ce chapitre par une revue de certains travaux découlant de la découverte par K. Schwarzschild d'une solution exacte aux équations de champ d'Einstein dans le vide. Le travail [25] d'Einstein et Rosen est d'une importance particulière pour cette nouvelle étude puisque nous nous intéresserons au parcours d'une particule traversant un pont d'Einstein-Rosen. À première vue, cette ligne de recherche peut sembler être une impasse pour certains lecteurs. En effet, le pont d'Einstein-Rosen a souvent été présenté comme non traversable dans la littérature. Dans la Section 6.2, nous soulignons que cette conclusion est en fait basée sur une analyse de l'extension de Kruskal-Szekeres, qui en tant qu'objet géométrique est très différente d'un pont d'Einstein-Rosen. Les principaux développements de ce chapitre ont lieu dans les sections 6.3 et 6.4. Nous montrons qu'une particule traversant le pont subit une *symétrie PT*, et nous finissons par discuter de sa signification physique.

En 1916, Karl Schwarzschild a publié successivement deux articles ([75],[74]). Le premier présentait la construction de la solution à l'équation d'Einstein dans le vide, basée sur les hypothèses suivantes :

— *Stationnarité* : Indépendance des termes de la métrique par rapport à la coordonnée temporelle [1].
— *Isotropie* et symétrie sphérique [2].
— Absence du terme croisé $\mathrm{d}r\mathrm{d}t$.
— Lorentzienne à l'infini.

Il a rapidement complété cette solution, appelée métrique extérieure de Schwarzschild, avec une métrique intérieure [74] décrivant la géométrie à l'intérieur d'une sphère remplie d'un fluide à densité constante ρ_o et solution de l'équation d'Einstein avec un second membre. Les conditions pour relier les deux métriques (continuité des géodésiques) ont été assurées. Les phénomènes de l'avance du périhélie de Mercure et de la déviation des rayons lumineux par effet de lentille gravitationnelle confirment cette solution (Figure 3.3). K. Schwarzschild a oeuvré pour s'assurer que les conditions régissant ces deux métriques étaient conformes à la réalité physique.

À titre d'exemple, de nos jours, les étoiles à neutrons, en raison de leur densité stupéfiante et de leur masse formidable, servent de laboratoires cosmiques naturels, explorant des régions de densité et de gravité inaccessibles dans les laboratoires terrestres. Considérons deux façons distinctes par lesquelles une étoile à neutrons pourrait atteindre un état de criticité physique.

Dans un scénario où la densité de l'étoile, ρ_o, reste constante, un rayon caractéristique $\hat{r}$ peut être défini. Ensuite, une criticité physique est atteinte lorsque le rayon de l'étoile est :

$$R_{\mathrm{cr}_\phi} = \sqrt{\frac{8}{9}}\hat{r} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G\rho_o}} \tag{6.1.1}$$

avec

$$\hat{r} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho_o}} \tag{6.1.2}$$

Ainsi,

— Pour la métrique extérieure, il était nécessaire que le rayon de l'étoile soit inférieur à $\hat{r}$.
— Quant à la métrique intérieure, le rayon de l'étoile devait être inférieur à R_{cr_ϕ}, car un rayon plus grand entraîne une augmentation de la pression jus-

1. Invariance par translation temporelle.
2. Invariance par *SO(3)*.

qu'à l'infini au centre de l'étoile.

Ensuite, pour les étoiles massives, une sphère de fer en implosion peut présenter un scénario complexe. En supposant que la masse de la sphère M soit conservée pendant l'implosion, nous devons considérer deux rayons critiques importants :

- Dans la partie centrale, le rayon critique géométrique est donné par le *Rayon de Schwarzschild*, qui est :

$$R_{\mathrm{cr}_\gamma} = R_s = 2\frac{GM}{c^2} \tag{6.1.3}$$

- En dehors de cette masse, le rayon critique physique est donné par 6.1.1

En considérant la conservation de la masse exprimée par $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_o$, nous pouvons explorer comment la densité variable ρ_o pendant l'implosion impacte ces rayons critiques.

En effet, si la criticité physique est atteinte pendant l'implosion, nous avons $R = R_{\mathrm{cr}_\phi}$.
Ensuite, en substituant l'équation de conservation de la masse dans 6.1.1, nous obtenons :

$$R = R_{\mathrm{cr}_\phi} = 2,25\frac{GM}{c^2} > R_{\mathrm{cr}_\gamma} \tag{6.1.4}$$

Nous pouvons en déduire que si la criticité physique est atteinte pour une masse M, elle se produit avant l'apparition de la criticité géométrique.

K. Schwarzschild a également souligné que les mesures portaient sur des conditions dépassant largement ce qui était compris dans le cadre de la réalité astrophysique de son époque.

Il est également important de noter que la topologie de cette solution géométrique est construite en reliant deux variétés bornées le long de leur frontière commune, une sphère S^2 avec une aire de $4\pi R_o^2$ (R_o étant le *rayon de l'étoile*).

En 1916, Ludwig Flamm a considéré la solution extérieure comme décrivant potentiellement un objet géométrique. La préoccupation était alors de tenter de décrire les masses comme une région de l'espace non contractile ([28]).

En 1934, Richard Tolman a été le premier à envisager une possible manipulation de la solution métrique la plus générale en introduisant un terme croisé drdt. Cependant, dans un souci de simplification, il l'a immédiatement éliminé en utilisant un simple changement de variable ([82]).

En 1935, Einstein et Rosen ont proposé, dans le cadre d'une modélisation géométrique des particules, une structure géométrique non contractile, grâce au changement de coordonnées suivant ([25]) :

$$u^2 = r - 2m \tag{6.1.5}$$

La solution métrique devient alors :

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{u^2}{u^2+2m}\mathrm{d}t^2 - 4u^2(u^2+2m)\mathrm{d}u^2 - (u^2+2m)^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2) \tag{6.1.6}$$

Les auteurs obtiennent ainsi une structure géométrique non contractile, appelée *"pont spatial"*, où une surface fermée d'aire $4\pi\alpha^2$, correspondant à la valeur $u = 0$, relie deux *"feuillets"* : l'un correspondant aux valeurs de u de 0 à $+\infty$ et l'autre de $-\infty$ à 0. Il est à noter que cette métrique n'est pas lorentzienne à l'infini. Bien que cette métrique, exprimée dans ce nouveau système de coordonnées, soit régulière, les auteurs soulignent qu'à la surface de gorge, son déterminant devient nul. Dans cette structure géométrique, deux feuillets semi-riemanniens bornés sont distingués, le premier correspondant à $u > 0$ et le second à $u < 0$. Il correspond à leur jonction le long de leur frontière commune. L'espace-temps global ne s'inscrit pas dans le cadre standard de la géométrie semi-riemannienne car il ne remplit pas la condition $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ à la gorge. Comme indiqué dans [80], il s'inscrit dans le cadre plus général de la géométrie semi-riemannienne singulière, qui permet des tenseurs métriques dégénérés.

En 1939, Oppenheimer et Snyder, capitalisant sur le découplage complet entre le temps propre et le temps vécu par un observateur distant, en l'absence d'un terme croisé en drdt, ont suggéré d'utiliser la solution métrique extérieure pour décrire le *"freeze frame"* de l'implosion d'une étoile massive à la fin de sa vie. En considérant que la variable t est identifiée au temps propre d'un observateur distant, cela crée ce motif de *"freeze frame"* tel qu'un phénomène de contraction dont la durée, en temps propre, mesurée en jours, semble pour un observateur lointain se dérouler en un temps infini ([48]). Ce document a été considéré comme la base du modèle de trou noir (Voir section 2.3.9).

En 1960, Kruskal a étendu la solution géométrique pour englober un espace-temps contractile, organisé autour d'une singularité centrale correspondant à $r = 0$. Les géodésiques sont étendues pour $r < \alpha$. Le modèle de trou noir (à symétrie sphérique[3]) prend alors sa forme définitive en tant qu'implosion d'une masse, en un bref instant, perçue comme un *"freeze-frame"* par un observateur lointain ([41]). La sphère de Schwarzschild est alors appelée l'*"horizon des événements"*.

En 1988, M. Morris et K. S. Thorne ont revisité cette interprétation géométrique en abandonnant la contractibilité, non pas pour tenter d'obtenir une modélisation géométrique de la solution, mais pour étudier la possibilité de voyages interstellaires, à travers des *"trous de ver"*, en utilisant la métrique suivante ([45]) :

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}l^2 + (b_o^2 + l^2)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2) \tag{6.1.7}$$

En se concentrant sur l'étude de la faisabilité des voyages interstellaires, les auteurs mettent en évidence les énormes contraintes associées à une telle géométrie ainsi que sa nature instable et transitoire.

3. En 1963, Roy Kerr a construit la solution stationnaire axisymétrique de l'équation d'Einstein dans le vide. Cependant, dans cette étude, nous nous limitons aux interprétations de la solution stationnaire avec symétrie sphérique (2.3.10).

6.2 Distinction entre l'extension de Kruskal-Szekeres et le pont d'Einstein-Rosen

L'extension de Kruskal-Szekeres et le pont d'Einstein-Rosen sont deux constructions majeures dans l'étude de la géométrie de l'espace-temps autour d'un trou de ver. Cependant, leurs natures géométriques diffèrent de manière significative.

L'espace-temps de Kruskal-Szekeres est défini par une *variété semi-riemannienne* traditionnelle, caractérisée par une métrique non dégénérée en chaque point. Cela le rend cohérent avec le cadre général de la relativité générale, où la signature de la métrique est homogène et ne varie pas.

En revanche, l'espace-temps d'Einstein-Rosen a une métrique dégénérée à certains points, notamment au niveau de la gorge du pont. Cette caractéristique le place dans la classe des *variétés semi-riemanniennes singulières* telles que définies par Ovidiu Stoica [80]. Cette distinction fondamentale montre que l'espace-temps de Kruskal-Szekeres n'est pas simplement une extension d'Einstein-Rosen mais une construction fondamentalement différente.

Ainsi, ces deux espaces-temps ne peuvent pas être considérés comme des versions l'un de l'autre mais plutôt comme deux interprétations distinctes de la géométrie autour d'un trou de ver. Cela a déjà été souligné dans plusieurs articles de Guendelman et al. Considérons en particulier [32], où ils écrivent :

> [29] La nomenclature de « pont d'Einstein-Rosen » dans plusieurs manuels standards (par exemple [15]) utilise la variété de Kruskal-Szekeres. Cette dernière notion de « pont d'Einstein-Rosen » n'est pas équivalente à la construction originale dans [14]. En effet, les deux régions dans l'espace-temps de Kruskal-Szekeres correspondant à la région extérieure de l'espace-temps de Schwarzschild ($r > 2m$) et étiquetées (I) et (III) dans [15] sont généralement *déconnectées* et partagent seulement une deux-sphère (la partie angulaire) comme frontière commune ($U = 0$, $V = 0$ en coordonnées de Kruskal-Szekeres), tandis que dans la construction originale du « pont » d'Einstein-Rosen, la frontière entre les deux copies identiques de la région extérieure de l'espace-temps de Schwarzschild ($r > 2m$) est une hypersurface tridimensionnelle ($r = 2m$).

Nous pouvons également citer deux autres articles dont les auteurs font la même observation concernant l'inadéquation de l'extension de Kruskal-Szekeres pour analyser correctement les ponts d'Einstein-Rosen : celui de Guendelman et al. [31] et celui de Poplawski [67]. En effet, pour distinguer ces espaces-temps, Poplawski utilise les termes *« pont de Schwarzschild »* et *« pont d'Einstein-Rosen »*.

Pour toutes ces raisons, nous ne travaillerons *pas* avec l'extension de Kruskal-Szekeres dans cette étude. Nous notons en particulier que l'affirmation courante [30, 81] selon laquelle le pont d'Einstein-Rosen n'est pas traversable est en fait basée sur une analyse de l'extension de Kruskal-Szekeres ; mais, comme souligné dans [32, 40], le pont d'Einstein-Rosen original [25] est en réalité traversable.

6.3 Construction d'une Solution Géométrique Lorentzienne à l'Infini à Deux Feuillets

Considérons la métrique extérieure de Schwarzschild dans sa forme classique sous la signature $(+---)$:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2) \tag{6.3.1}$$

6.3.1 Symétrie T

Cette métrique construite en 1916 ([75]), en tant que solution à l'équation d'Einstein dans le vide, était dotée d'une hypothèse supplémentaire, que son auteur n'a pas mentionnée, celle de l'invariance par symétrie temporelle. Il est important de noter que cette hypothèse n'a pas de base physique et entraîne l'élimination d'un terme croisé $\mathrm{d}r\mathrm{d}t$ dans la métrique, comme Tolman l'avait envisagé dès 1934 (Page 239 de [82]).

Inversement, A. Eddington l'a introduite dans le but d'éliminer la singularité de coordonnées à la surface de Schwarzschild en $r = \alpha$, en utilisant le changement de variable ([24],[40]) :

$$t_E^+ = t + \frac{\alpha}{c} \ln\left|\frac{r}{\alpha} - 1\right| \tag{6.3.2}$$

La métrique devient alors :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t_E^{+2} - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) \mathrm{d}r^2 - \frac{2\alpha c}{r} \mathrm{d}r\mathrm{d}t_E^+ - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right) \tag{6.3.3}$$

Nous savons que dans ces conditions, du point de vue d'un observateur distant, le temps de chute libre est fini, c'est-à-dire qu'une particule massive en chute atteindra la surface $r = \alpha$ pour une valeur finie de t_E^+ [40]. En revanche, le temps d'évasion reste infini. La métrique pour laquelle le temps d'évasion est fini sera obtenue en effectuant ce changement de variable :

$$t_E^- = -t - \frac{\alpha}{c} \ln\left|\frac{r}{\alpha} - 1\right| \tag{6.3.4}$$

Ainsi, la métrique devient :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t_E^{-2} - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) \mathrm{d}r^2 + \frac{2\alpha c}{r} \mathrm{d}r\mathrm{d}t_E^- - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right) \tag{6.3.5}$$

Cela équivaut à inverser la coordonnée temporelle dans 6.3.3. Ainsi, ce choix d'associer deux métriques décrivant deux espaces semi-riemanniens conduit à considérer une solution géométrique globale à deux feuillets *T-symétriques* reliés par un *"pont"* dans ce système de coordonnées particulier ainsi que dans le système de coordonnées d'Einstein et Rosen ([25]).

Maintenant, démontrons que ces transformations sont également accompagnées d'une *P-symétrie*.

6.3.2 Symétrie P

Dans cette représentation, les géodésiques radiales du premier feuillet sont orthogonales au plan tangent du *"pont spatial"* lorsqu'elles l'atteignent. Ces mêmes géodésiques, en émergeant dans le deuxième feuillet, sont également orthogonales à ce même plan tangent. Considérons maintenant quatre points formant un tétraèdre, qui convergent vers le *"pont spatial"* le long de trajectoires radiales. Nous pouvons définir une orientation 3D en définissant une direction de traversée des points sur chacun des triangles équilatéraux formant le tétraèdre. Par rapport à la coordonnée r, il semble que ces points rebondissent sur une surface rigide, entraînant une inversion de l'orientation du tétraèdre. Les tétraèdres amont et aval deviennent alors *énantiomorphes* (Figure 6.1).

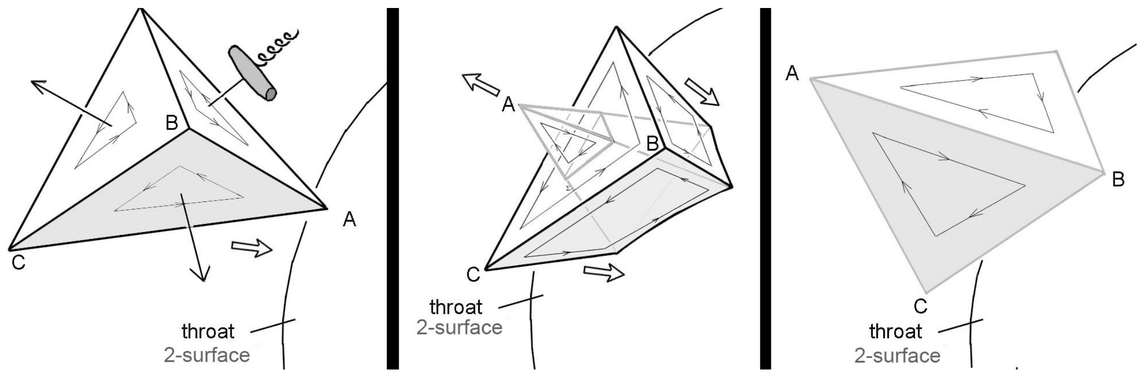


FIGURE 6.1 – Inversion de l'espace lors de la traversée du *"pont spatial"*

Le changement d'orientation est déjà visible dans la représentation 2D simplifiée d'un trou de ver dans la Figure 6.2 (version vectorisée de l'image d'origine pour une raison de qualité). Observons cette figure vue de dessus et imaginons un triangle glissant à la surface du feuillet supérieur vers la gorge. Après avoir traversé la gorge, le triangle commence à glisser sur le feuillet inférieur et nous le voyons maintenant à l'envers depuis notre position au-dessus du feuillet supérieur. De notre point de vue, son orientation a donc changé. La signification physique de ce changement d'orientation sera discutée dans la Section 6.3.3.

La structure géométrique de la paire de métriques 6.1.6 et 6.3.1 représente donc un *"pont"* reliant deux espaces semi-riemanniens *PT-symétriques*.

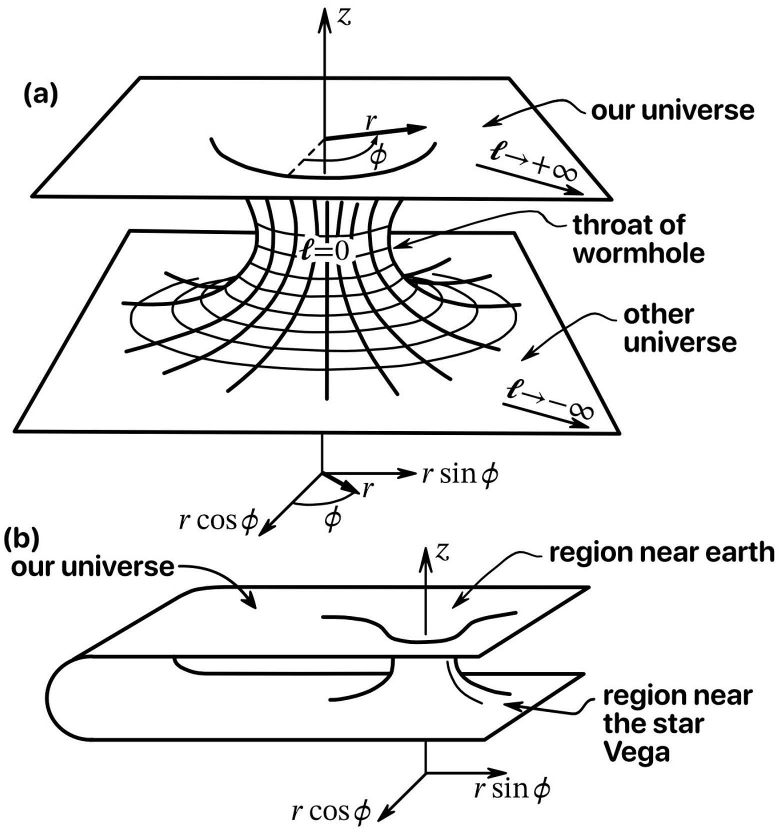


FIGURE 6.2 – Page 396 de l'article de M. Morris et K.S. Thorne (1988)

L'élément de cette surface 2D est alors donné par :

$$\sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} = \sqrt{|g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|} = \alpha^2 \sin(\theta) \tag{6.3.6}$$

Comme cette métrique décrit une surface 2D sphérique (comme une sphère de rayon constant dans un espace-temps 4D), l'élément de surface différentielle est donné par :

$$\mathrm{d}A = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \alpha^2 \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{6.3.7}$$

Pour trouver la surface minimale de ce *"pont spatial"*, nous devons intégrer cet élément de surface sur tous les angles possibles :

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \alpha^2 \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 4\pi\alpha^2 \tag{6.3.8}$$

Il est donc non-contractile avec une surface minimale de $4\pi\alpha^2$.

6.3.3 Identification des Deux Feuillets

Dans la Section 6.3.2, nous avons décrit le changement d'orientation d'un tétraèdre traversant la gorge du trou de ver dans la Figure 6.1, et d'un triangle traversant la gorge dans la Figure 6.2. Le changement d'orientation du triangle n'est visible que pour une personne regardant la Figure 6.2 dans son ensemble. Par conséquent, il ne correspond à aucun phénomène physiquement observable, car tout observateur physique doit être situé sur l'un des deux feuillets et ne peut pas voir directement l'autre feuillet. La situation est la même dans la Figure 6.1 : La photo du milieu représente la situation d'un point de vue où l'on pourrait regarder simultanément les deux côtés du trou de ver (B et C n'ont pas encore atteint la gorge, tandis que A l'a déjà traversée et émerge de l'autre côté). Cela est à nouveau impossible pour un observateur physique : il semble que la *symétrie P* telle qu'elle a été décrite jusqu'à présent ne corresponde à aucun phénomène physiquement observable. Cependant, nous pouvons lui donner une signification physique réelle avec un ingrédient supplémentaire introduit par Einstein et Rosen [25].

Rappelons que leur motivation n'était pas d'étudier les voyages interstellaires comme dans la Figure 6.2, mais de décrire les particules élémentaires par des solutions aux équations de la relativité générale. Citons l'abstract de leur article : *"Ces solutions impliquent la représentation mathématique de l'espace physique par un espace à deux feuillets identiques, une particule étant représentée par un "pont" connectant ces feuillets."* Einstein et Rosen suggèrent également que le problème à plusieurs particules pourrait être étudié par des méthodes similaires, mais ce travail n'est pas mené à bien dans leur article.

Citons à nouveau [25] : *"Si plusieurs particules sont présentes, ce cas correspond à la recherche d'une solution sans singularités des équations modifiées (3a), la solution représentant un espace à deux feuillets congruents reliés par plusieurs "ponts" discrets."* De leur point de vue, deux points dans la représentation mathématique 6.1.6 avec des valeurs identiques de θ, ϕ mais des valeurs opposées de u correspondent donc à deux points dans l'espace physique avec la même valeur de r ($r = u^2 + m$). Si nous faisons la même identification de points avec des valeurs opposées de u, la situation représentée dans la photo du milieu de la Figure 6.1 peut être vue par un observateur physique. La *symétrie P* décrite dans la Section 6.3.2 a maintenant une signification physique réelle. Nous développerons l'interprétation de la *symétrie PT* combinée dans la section suivante.

6.4 Une Autre Représentation de cette Géométrie

En appliquant le changement de variable suivant aux équations 6.3.3 et 6.3.5 :

$$r = \alpha\,(1 + \log\cosh(\rho)) \tag{6.4.1}$$

Nous obtenons les deux métriques suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &\left(\frac{\log\cosh(\rho)}{1+\log\cosh(\rho)}\right) c^2 \mathrm{d}t_E^{+2} - \left(\frac{2+\log\cosh(\rho)}{1+\log\cosh(\rho)}\right)\alpha^2\tanh^2(\rho)\mathrm{d}\rho^2 \\ &- 2c\alpha\left(\frac{\tanh(\rho)}{1+\log\cosh(\rho)}\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}t_E^{+} - \alpha^2(1+\log\cosh(\rho))^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) \end{aligned} \tag{6.4.2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &\left(\frac{\log\cosh(\rho)}{1+\log\cosh(\rho)}\right)c^2\mathrm{d}t_E^{-2} - \left(\frac{2+\log\cosh(\rho)}{1+\log\cosh(\rho)}\right)\alpha^2\tanh^2(\rho)\mathrm{d}\rho^2\\ &+2c\alpha\left(\frac{\tanh(\rho)}{1+\log\cosh(\rho)}\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}t_E^- - \alpha^2(1+\log\cosh(\rho))^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\end{aligned} \tag{6.4.3}$$

Pour obtenir la métrique qui structure le deuxième feuillet pour $\rho < 0$ afin de garantir la continuité des géodésiques traduisant le passage de la matière à travers le *"pont"* avec un temps d'évasion fini sur ce feuillet, nous devons appliquer la *symétrie T* où la coordonnée temporelle est inversée lors de la traversée [4].

Ces métriques, qui sont lorentziennes à l'infini, structurent donc deux feuillets correspondant à des valeurs de ρ variant respectivement de 0 à $+\infty$ et de $-\infty$ à 0. Sur le *"pont spatial"* pour $\rho = 0$, les composantes g_{tt} et $g_{\rho\rho}$ du tenseur métrique disparaissent, ne laissant que les deux dernières composantes spatiales $g_{\theta\theta}$ et $g_{\phi\phi}$, qui sont :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{6.4.4}$$

Dans ce système de coordonnées particulier, nous pouvons en déduire que son déterminant est nul. La *symétrie P* découle du fait que les points adjacents, cette fois explicitement différenciés, sont inférés par $\rho \to -\rho$. Cette transformation joue le même rôle que $u \to -u$ dans 6.1.6.

En associant ces solutions métriques sous ces deux conditions, nous obtenons un *Trou de Ver* et une *Fontaine Blanche* comme une *Membrane à Sens Unique*, reliant deux espaces semi-riemanniens à travers un *"pont"* qui ne peut être franchi que dans un seul sens. Supposons en outre que le trou de ver ne mène pas à un autre univers comme dans la Figure 6.2.a, ou à un point distant dans le même univers comme dans la Figure 6.2.b ; mais que les deux feuillets congruents correspondent aux mêmes points dans l'univers physique par la transformation $u \to -u$ (ou $\rho \to -\rho$), comme suggéré dans [25] et dans la Section 6.3.3. Nous pouvons alors conclure que les deux feuillets sont *PT-symétriques.*

Dans la littérature, l'inversion de la coordonnée temporelle a été analysée de diverses manières. En particulier :

(i) Par la théorie des groupes dynamiques de J-M Souriau ([76],[78]), où elle a été démontrée comme induisant une inversion de l'énergie. Par conséquent, la symétrie de renversement du temps transforme tout mouvement d'une particule de masse m en un mouvement d'une particule de masse $-m$ ([47], page 191). À la page 192 du même livre, l'auteur offre une analyse alternative qui évite les masses négatives. Souriau souligne que ces alternatives doivent être

4. $t_E^+ = -t_E^-$

évaluées en fonction de leur capacité à se confirmer par les expériences.

(ii) Feynman a proposé une interprétation de l'antimatière comme de la matière ordinaire se déplaçant *à rebours* dans le temps.

(iii) Il est connu, à partir d'analyses théoriques (le théorème CPT) et d'expériences, que les particules élémentaires obéissent à des lois physiques invariantes sous la *symétrie CPT*.

La *symétrie PT* découverte dans la Section 6.3 peut être considérée comme une *symétrie CPT* suivie d'une *symétrie C* (inversion de la charge électrique). Nous obtiendrions donc de l'antimatière sur le deuxième feuillet. Si le deuxième feuillet contient déjà de la matière ordinaire, elle pourrait interagir avec l'antimatière provenant du premier feuillet, constituant ainsi une source d'énergie dont les applications peuvent être multiples aussi bien sur le plan écologique par le recyclage des déchets radioactifs par exemple, que dans le secteur énergétique par la production d'énergie en convertissant 100% de la masse des particules et antiparticules en interaction.

6.5 Conclusion

Nous avons introduit une nouvelle construction géométrique basée sur la solution stationnaire à symétrie sphérique de l'équation d'Einstein dans le vide, en nous limitant aux deux seules hypothèses, inspirées de la physique : *l'isotropie* (invariance par $SO(3)$) et la *stationnarité* (invariance par translation dans le temps). Ce faisant, nous n'ajoutons pas, comme cela a été fait précédemment sans aucune justification physique réelle, l'invariance par la symétrie de *"retournement du temps"* de $t \to -t$ ("*staticité*"). Ce nouvel ensemble d'hypothèses moins restrictives introduit la présence d'un terme croisé $\mathrm{d}r\mathrm{d}t$, que l'hypothèse de *staticité* avait précédemment interdit. Ce nouvel objet géométrique se comporte comme une "*Membrane à Sens Unique*", une combinaison d'un *trou de ver* et d'une *fontaine blanche* à travers un "*pont*". Avec une métrique lorentzienne à l'infini, cette structure relie deux espaces semi-riemanniens énantiomorphes *PT-symétriques* avec des flèches temporelles opposées. Par conséquent, cet objet correspond à la couverture de deux feuillets d'un espace-temps à quatre dimensions, se présentant comme *PT-symétrique*, connectées le long d'un "*pont*". En nous inspirant d'Einstein et Rosen, nous avons suggéré de représenter un point dans l'espace physique par une paire de points congruents, l'un sur chacun des deux feuillets. Nous avons montré que cette identification de points congruents devrait conduire à des effets physiques observables lorsqu'un objet traverse le pont spatial entre les deux feuillets.

6.6 Applications Civiles

Énergie

L'application de la conversion de matière en antimatière représente une avancée significative dans le domaine énergétique. Cette technologie novatrice offre la possibilité de transformer les déchets radioactifs, une source de préoccupation environnementale majeure, en une source d'énergie propre et renouvelable. Par l'application de la *symétrie* PT, il devient envisageable de convertir les particules de matière radioactive à masse positive en antiparticules à masse négative. Ce processus révolutionnaire non seulement neutralise les dangers inhérents aux déchets radioactifs mais permet également de les transformer en une source d'énergie propre et abondante. L'énergie générée par l'annihilation matière-antimatière est exempte d'émissions de neutrons, éliminant ainsi les risques de pollution radioactive supplémentaire. Cette double fonctionnalité ouvre des perspectives prometteuses pour une transition énergétique vers des sources plus durables et écologiques, en accord avec les principes de développement durable.

Écologie

Dans le contexte écologique, la conversion de matière en antimatière par l'application de la *symétrie* PT suggère une méthode innovante pour le recyclage des déchets radioactifs.

Nathalie Debergh, à travers ses recherches en mécanique quantique relativiste, a mis en lumière la possibilité de transformer des anti-fermions d'énergie et de masse positives en équivalents négatifs, ouvrant ainsi la voie à l'élimination efficace des déchets radioactifs sans compromettre l'environnement. Sa publication [22] explore l'émergence d'états d'énergie négative en montrant que les anti-fermions [5] d'énergie et de masse positives peuvent être transformés en anti-fermions d'énergie et de masse négatives par l'application linéaire et unitaires des deux opérateurs d'inversion T et P à l'équation de Dirac. Elle a pu démontrer que cette application préserve la norme de l'état quantique, ce qui est une propriété essentielle pour les transformations physiques. Cette approche unitaire a donc permis d'explorer des solutions

5. Les fermions sont des particules subatomiques, c'est-à-dire des constituants fondamentaux de la matière, plus petits que les atomes. Ils suivent un principe particulier nommé le principe d'exclusion de Pauli, qui stipule que deux fermions ne peuvent pas occuper le même état quantique simultanément. En d'autres termes, chaque fermion dans un système doit être unique en termes de ses propriétés quantiques, comme sa position, son élan, et son orientation spinale. Cette règle est ce qui permet aux atomes de se former et de se structurer de manière complexe, donnant lieu à toute la diversité de la matière dans l'univers. Les fermions sont également décrits par une règle statistique connue sous le nom de statistique de Fermi-Dirac, qui prédit comment ils se comportent en groupe à différentes températures. Cette statistique aide à comprendre pourquoi la matière se comporte différemment à l'échelle quantique par rapport à notre expérience quotidienne macroscopique. Parmi les fermions, on trouve les quarks et les leptons. Les quarks s'assemblent pour former des protons et des neutrons, qui constituent les noyaux des atomes. Les leptons incluent les électrons, qui orbitent autour du noyau atomique, ainsi que les neutrinos, des particules élémentaires très légères et faiblement interactives. Ensemble, quarks et leptons forment la matière ordinaire.

à l'équation de Dirac qui incluent des énergies et des masses négatives d'une manière cohérente avec les principes fondamentaux de la théorie quantique des champs.

Cette avancée théorique n'est pas seulement un pas en avant dans la compréhension de la physique fondamentale mais représente également une application pratique potentiellement révolutionnaire pour la gestion écologique des déchets. En convertissant les déchets radioactifs en antiparticules à masse négative, nous pourrions non seulement réduire significativement la pollution radioactive mais aussi contribuer à la production d'énergie propre, soulignant ainsi l'interconnexion profonde entre énergie et écologie dans la recherche de solutions durables.

Considérations Éthiques et Sécuritaires

L'avènement de technologies permettant la conversion de matière en antimatière, en particulier pour des applications telles que le recyclage écologique des déchets radioactifs, soulève des questions éthiques et des défis de sécurité considérables. D'un côté, la promesse d'une source d'énergie propre et abondante, capable de réduire significativement les déchets dangereux, représente une avancée majeure vers un avenir durable. D'un autre côté, les risques associés à la manipulation et au stockage de l'antimatière nécessitent l'établissement de normes de sécurité extrêmement strictes pour prévenir tout incident pouvant avoir des répercussions désastreuses. La mise en place de protocoles rigoureux et la surveillance continue des installations de conversion sont impératives pour assurer une utilisation sûre de cette technologie révolutionnaire.

Par ailleurs, les implications morales de l'exploitation de l'antimatière interpellent notre responsabilité collective envers les générations actuelles et futures. Il est essentiel d'adopter une approche prudente et réfléchie, en évaluant soigneusement les bénéfices à long terme face aux risques potentiels. Cela implique une régulation internationale forte, garantissant que le développement et l'application de la conversion de matière en antimatière soient guidés par des principes éthiques, le respect de l'environnement et le bien-être de l'humanité. La collaboration entre pays, chercheurs et citoyens sera cruciale pour établir un consensus sur les meilleures pratiques à adopter, assurant ainsi que les avancées dans ce domaine servent l'intérêt commun tout en minimisant les dangers inhérents.

6.7 Annexe

Maintenant, examinons le cas du transfert de matière vers une seconde couche de l'univers, où nous sommes libres de définir la métrique sortante vers le deuxième feuillet. En appliquant le nouveau changement de variable 6.7.1 à la métrique de Schwarzschild 6.3.1, en inversant le signe de la constante d'intégration $\alpha \to -\alpha$, nous pouvons ainsi construire une métrique "*répulsive*" sur le deuxième feuillet :

$$t_E^+ = t + \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} + 1 \right| \tag{6.7.1}$$

Elle assure la continuité des géodésiques du premier feuillet au deuxième avec un temps de chute libre fini sur le premier et un temps d'évasion fini sur le deuxième.

La métrique entrante structurant le premier feuillet devient :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t_E^{+2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \mathrm{d}r^2 - \frac{2\alpha c}{r} \mathrm{d}r \mathrm{d}t_E^+ - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2) \tag{6.7.2}$$

Et la métrique sortante structurant le deuxième feuillet devient :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t_E^{-2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \mathrm{d}r^2 + \frac{2\alpha c}{r} \mathrm{d}r \mathrm{d}t_E^- - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2) \tag{6.7.3}$$

En prenant la forme générale :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t_E^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \mathrm{d}r^2 + \delta \frac{2\alpha c}{r} \mathrm{d}r \mathrm{d}t_E - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2) \tag{6.7.4}$$

où $\delta = -1$ pour la métrique structurant le premier feuillet et $\delta = +1$ pour la métrique sortante structurant le deuxième feuillet. Ainsi, comme les deux métriques sont symétriques par inversion du temps $t \to -t$, la continuité des géodésiques est assurée d'un feuillet à l'autre avec un temps de chute libre fini sur le premier et un temps d'évasion fini sur le deuxième.

Cela implique que la matière ordinaire pourrait potentiellement être convertie en antimatière de masse négative, qui serait ensuite transférée vers une couche distincte de l'univers. Ce processus implique essentiellement la transformation de la matière en antimatière à masse négative. En combinant cette solution géométrique avec la solution précédemment développée dans la Section 6.3, nous pouvons explorer la faisabilité des voyages interstellaires en exploitant les propriétés métriques de cette deuxième couche.

Chapitre 7

Nature Topologique du Modèle

7.1 Définition

En cosmologie, la topologie se réfère à l'étude des propriétés spatiales fondamentales de l'univers qui restent invariantes sous des transformations continues. Contrairement à la géométrie, qui se concentre sur les distances et les angles précis, la topologie s'intéresse davantage à la manière dont l'espace est connecté et structuré à grande échelle. Elle examine des aspects tels que la connectivité, la continuité et les frontières de l'espace cosmique, indépendamment de sa forme et de sa taille exactes.

Dans un contexte cosmologique, la topologie aide à comprendre la structure globale de l'univers, y compris des questions telles que si l'univers est fini ou infini, s'il a des *"bords"* ou s'il est illimité, et s'il pourrait être connecté de manière non triviale (comme dans les modèles d'univers multi-connectés). Cela inclut l'examen de la forme et de la structure à grande échelle de l'univers, déterminé par la distribution des galaxies, les fonds de radiation cosmique et d'autres observations astrophysiques.

La topologie est particulièrement pertinente pour les modèles cosmologiques avancés, tels que le modèle cosmologique Janus, car elle fournit un cadre pour explorer des concepts tels que l'univers multicouche, la connectivité entre différentes régions de l'espace-temps et d'autres propriétés non intuitives qui peuvent découler de la physique théorique avancée.

En résumé, la topologie en cosmologie est un outil puissant pour explorer et comprendre la structure fondamentale et la nature de notre univers, au-delà des contraintes de la géométrie classique.

Avant de poursuivre ce chapitre, il est crucial de lire et de bien comprendre la bande dessinée *Topologicon* [52], écrite par le Dr. Jean-Pierre Petit [1]. Ce travail vulgarise les concepts de topologie en relation avec la cosmologie et la relativité générale. En effet, ce chapitre traite principalement d'outils conceptuels qui sont assez contre-intuitifs. Par conséquent, il est fortement recommandé de lire cette

1. Librement accessible sur ce site web `http://www.savoir-sans-frontieres.com/`

bande dessinée au préalable pour une meilleure compréhension.

7.2 Modèle du Trou de Ver

En développant la nouvelle interprétation du modèle de trou de ver discutée dans le chapitre précédent 6, nous proposons une perspective topologique plus profonde en relation avec la relativité générale. Par exemple, considérons la sphère de gorge S^2 qui relie deux couches de l'espace-temps à travers la *symétrie PT*. Cette configuration pourrait-elle être analogue à un plan projectif ? En topologie, un plan projectif est une surface non orientable avec des propriétés uniques, telles que des lignes qui divergent en un point mais se rejoignent de l'autre côté. Cela suggère que la connexion entre les couches de l'espace-temps à travers la gorge du trou de ver pourrait défier l'orientation traditionnelle de l'espace, évoquant ainsi le plan projectif.

Notre conjecture est fondée sur la nullité du déterminant de la métrique sur cette surface qui pourrait indiquer une nature non orientable en 2D. Si cette sphère de gorge est fermée et a une surface limitée, elle pourrait être identifiée avec un plan projectif P^2. Bien que cette idée puisse sembler contre-intuitive, elle découle directement de la topologie de l'objet telle que décrite par la solution extérieure de Schwarzschild 2.3.119.

Dans le contexte de la relativité générale, le concept de volume élémentaire dans l'espace-temps courbé est crucial. Le volume élémentaire en dimensions n, défini par une métrique riemannienne, est donné par $\mathrm{d}V = \sqrt{|\det(g)|}\,\mathrm{d}^n x$, où g est le tenseur métrique et $\det(g)$ son déterminant. Ce volume élémentaire n'est pas simplement le produit des différentielles de coordonnées, comme dans l'espace euclidien, mais il est modifié par la structure courbée de l'espace-temps. Le facteur $\sqrt{|\det(g)|}$ reflète comment l'espace-temps est déformé par la présence de masse et d'énergie, selon les équations d'Einstein. Ainsi, dans les régions à forte courbure, ce volume élémentaire peut se comporter de manière contre-intuitive, révélant des caractéristiques topologiques fascinantes et parfois surprenantes de l'espace-temps.

Rappelons que la sphère S^2 possède une métrique définie par l'expression :

$$\mathrm{d}s^2 = \alpha^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2) \tag{7.2.1}$$

La métrique d'une sphère est une fonction mathématique qui décrit les distances entre les points sur la surface de la sphère. Comme cette métrique décrit une sphère 2D (comme une sphère de rayon constant dans un espace-temps 4D), l'élément de surface différentiel est donné par :

$$\mathrm{d}A = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \alpha^2\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{7.2.2}$$

Et c'est en fait un élément de surface car une sphère est une surface bidimensionnelle dans l'espace tridimensionnel. Lorsque nous intégrons cet élément de surface, nous obtenons la surface décrite par l'expression :

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \alpha^2 \sin(\theta) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = 4\pi\alpha^2 \tag{7.2.3}$$

Ce qui correspond à la surface d'une sphère de rayon α. Nous pouvons également remarquer que cette surface est analogue à celle d'un plan projectif P^2, un concept rarement abordé en géométrie standard.

7.3 Modèle de l'Univers

En géométrie, une sphère S^2 peut être facilement visualisée car nous pouvons la *plonger* dans notre espace de représentation tridimensionnel $\mathbb{R}^3$. Cependant, un plan projectif, tel que P^2, ne peut pas être *plongé* de la même manière. Le plan projectif est un type de surface non orientable, ce qui signifie qu'il ne peut pas être étalé à plat dans l'espace tridimensionnel sans auto-intersection. Pour visualiser un plan projectif, nous devons utiliser *"l'immersion"*, une méthode où la surface *se recoupe elle-même* selon un ensemble *d'auto-intersections*. Ce concept remet en question notre compréhension traditionnelle des formes et des espaces.

Pour comprendre les plans projectifs de dimensions supérieures, comme P^3 ou P^n, nous devons abandonner les représentations visuelles et adopter une pensée abstraite. Ce changement mental est nécessaire pour explorer des structures topologiques complexes qui vont au-delà de nos dimensions.

Par exemple, le retournement d'une sphère est possible si nous considérons chaque bande formant les méridiens qui la recouvrent comme étant capable de se traverser par *"immersion"* pour former un revêtement à deux feuillets d'une bande de Möbius à trois demi-torsions ([44]). Cet effet d'*"auto-intersection"* est uniquement lié à l'immersion de ce revêtement dans notre espace de représentation tridimensionnel $\mathbb{R}^3$.

Nous pouvons alors faire coïncider le pôle M d'un feuillet de cette sphère S^2 avec le pôle opposé M' de l'autre feuillet du même revêtement. Ceci est appelé *"la conjonction des points antipodaux"*. Cette transformation permet aux flèches du temps, portées par les méridiens de cette sphère, de se rejoindre mais en opposition sur chaque feuillet du même revêtement comme sur la Figure 7.1.

NB : La bande de Möbius, ou ruban de Möbius, est une surface avec un seul côté et un seul bord. C'est un objet mathématique classique en topologie, une branche des mathématiques qui étudie les propriétés des espaces qui restent invariantes sous les transformations continues. La bande de Möbius peut être créée en prenant une bande de papier, en lui donnant un demi-torsion, puis en joignant les deux extrémités de la bande. Cette configuration donne une surface qui, si vous commencez à tracer une ligne le long de celle-ci, retournera à son point de départ après avoir

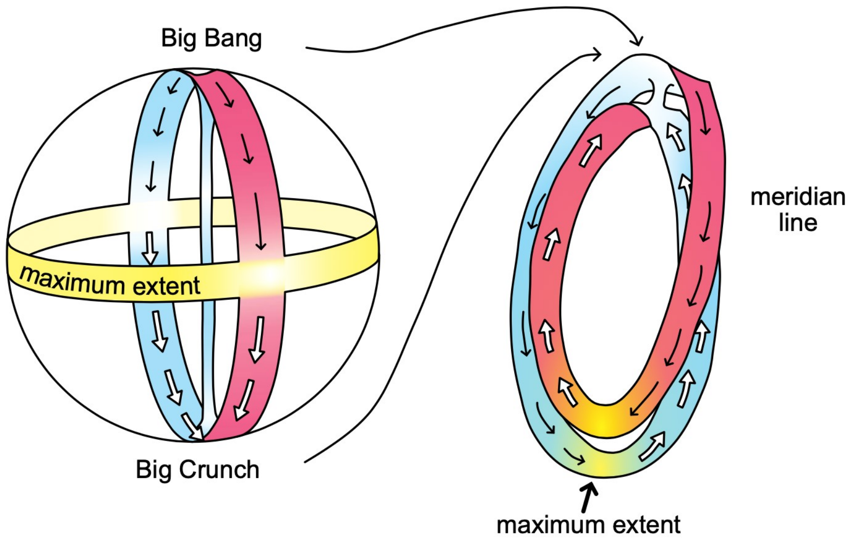


Figure 7.1 – Retournement d'une Sphère en Conjoignant les Points Antipodaux

traversé les deux *"côtés"* de la bande sans jamais lever votre stylo.

Ce qui rend la bande de Möbius fascinante, c'est sa nature non orientable. Dans un espace normal, comme une feuille de papier, il existe une distinction claire entre le *"dessus"* et le *"dessous"*. Cependant, sur une bande de Möbius, cette distinction n'existe pas : en parcourant la surface, vous passez de manière transparente du haut en bas et vice versa.

La bande de Möbius est souvent utilisée pour illustrer des concepts importants en topologie et en géométrie, tels que l'idée d'une surface à un seul côté et les limites de notre intuition spatiale. En physique théorique et en cosmologie, la bande de Möbius peut également servir de modèle pour explorer des structures spatiales complexes et des phénomènes tels que la torsion de l'espace-temps ou la connexion entre différentes dimensions.

Ainsi, la symétrie PT peut être interprétée comme le parcours à travers un plan projectif d'un feuillet du revêtement à l'autre (Figure 7.2).

Pour qu'un objet géométrique soit équipé d'un système de coordonnées fonctionnel, la non-nullité du déterminant de sa métrique est alors essentielle. En particulier, dans le contexte des *"coordonnées gaussiennes"*, ce principe est crucial. Dans un espace à quatre dimensions, cette exigence permet la foliation de l'espace par un ensemble d'hypersurfaces tridimensionnelles. Ces hypersurfaces sont *"orthogonales"* aux géodésiques, signifiant perpendiculaires aux chemins qu'un objet en mouvement libre suivrait, et sont caractérisées uniquement par la coordonnée temporelle. La distinction entre la *"flèche du temps"* et le *"temps propre"* est importante ici : la flèche du temps fait référence à une dimension temporelle unidirectionnelle, tandis que le temps propre est une mesure du temps spécifique à l'observateur.

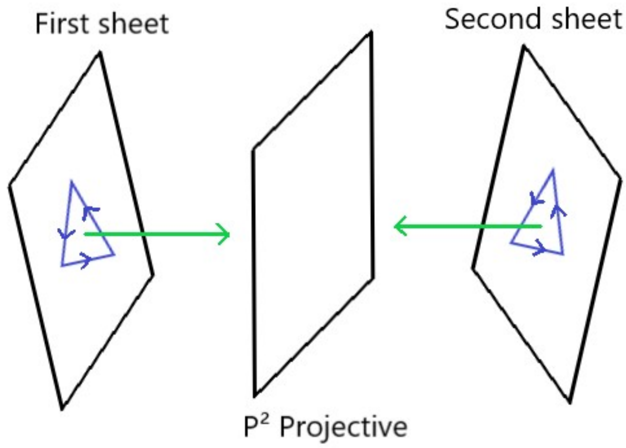


FIGURE 7.2 – Projectif P^2

Dans le contexte de l'espace-temps bidimensionnel que nous examinons, la foliation est effectuée à l'aide d'une série de cercles. Chaque point sur ces cercles peut être associé à un *"vecteur temps"*, qui est orthogonal aux cercles. L'orthogonalité signifie dans ce cas que le vecteur temps est positionné pour être perpendiculaire à la surface de chaque cercle, formant ainsi une composante temporelle distincte de l'espace-temps (Figure 7.3).

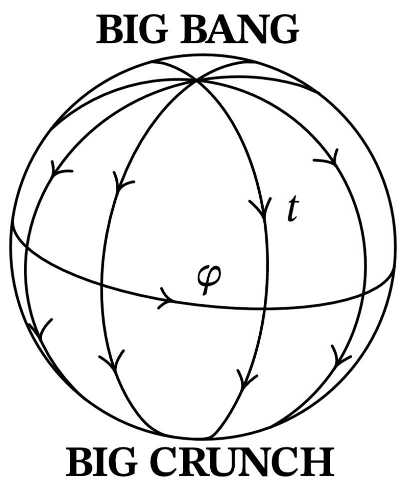


FIGURE 7.3 – Illustration du *"Vecteur Temps"* Orthogonal à un Cercle dans une Famille de Cercles Foliant une Sphère S^2

Même dans ce cas, cet *"objet"* possède deux points singuliers à savoir ses pôles, où l'azimut est indéfini. Ces pôles représentent des *"singularités de maillage"* inévitables. Il y en a deux parce que la caractéristique d'Euler-Poincaré de cet objet est égale à 2. Par exemple, si nous considérons un polyèdre simple comme un tétraèdre pour représenter une approximation de la sphère, qui est une pyramide à base triangulaire, sa caractéristique d'Euler-Poincaré est de 4 (sommets) - 6 (arêtes) + 4 (faces) = 2. La caractéristique d'Euler-Poincaré d'une sphère S^n est égale à 2 si n est pair et zéro si n est impair (Section 6.3.3).

De notre point de vue, l'univers serait une sphère S^4 avec deux singularités, le Big Bang et le Big Crunch. Une sphère à quatre dimensions S^4 est analogue à une sphère régulière, étendant le concept à des dimensions supérieures. En considérant cette sphère avec ses deux pôles, le Big Bang et le Big Crunch, elle peut être foliée par des *"parallèles"* (similaires aux cercles parallèles sur une surface 2D S^2). Ce processus de foliation implique la création de couches, ou *"tranches"*, à travers la sphère, qui sont analogues aux lignes représentant les latitudes sur Terre. L'orientation passé-futur devient alors uniforme partout. Dans ce contexte, l'orientation passé-futur fait référence à la direction du temps du Big Bang au Big Crunch, qui devient cohérente dans toute cette structure foliée. Par rapport à cette normale aux surfaces parallèles, l'espace-temps est orientable, ce qui signifie qu'il existe une notion bien définie de *"haut"* et *"bas"* dans la structure de l'espace-temps.

Cependant, en *"pliant"* cette surface (que ce soit S^2 ou S^4), nous créons une situation où deux parallèles se superposent. Plier, dans ce sens, signifie manipuler la structure de la sphère de telle manière que différentes parties de la surface entrent en contact. Leurs vecteurs temps deviennent alors antiparallèles ou opposés, comme mentionné précédemment. Le vecteur temps est une manière de représenter la direction du temps à chaque point de l'espace-temps. Lorsque ces vecteurs deviennent antiparallèles, cela signifie que la direction du temps est inversée aux points de contact. Cela conduit à ce que nous pourrions appeler une *"orientation induite"*. L'orientation induite ici fait référence à la nouvelle orientation des vecteurs temps résultant du processus de pliage. À chaque point de cet espace-temps, structuré comme un revêtement à deux feuillets d'une bande de Möbius à trois demi-torsions (*couverture à deux plis*), la *"matière antipodale"* (à la fois spatiale et temporelle) apparaît *"rétrochronale"*. Une bande de Möbius à trois demi-torsions est une surface à un seul côté qui peut être visualisée en tordant une bande de papier trois fois avant de joindre les extrémités.

Dans l'article de Jean-Pierre Petit [54], il considère l'interaction de l'univers avec le champ gravitationnel créé par son antipode, en supposant que les lois d'interaction sont les suivantes :

1. Les masses ordinaires s'attirent mutuellement selon Newton.
2. Les masses *"antipodales"* s'attirent mutuellement selon Newton.
3. Les masses ordinaires et les masses *"antipodales"* se repoussent mutuellement selon une loi *"anti-Newton"*.

Cette hypothèse l'a conduit à *"plier"* l'univers en lui donnant la topologie d'un *"revêtement à deux feuillets"* d'une surface 2D.

Ainsi *"pliée"*, la sphère S^2 (surface fermée) devient le revêtement d'une autre surface fermée, la surface de Boy, qui a un seul pôle puisque sa caractéristique d'Euler-Poincaré est égale à 1 (Figure 7.4). La surface de Boy [2] est une surface non orientable unique en 3D avec une seule face et un seul bord, présentant un point singulier où tous les points antipodaux convergent.

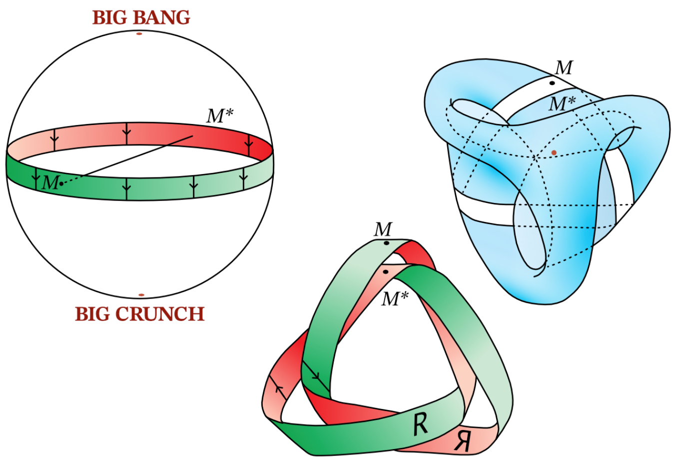


FIGURE 7.4 – Le voisinage de l'équateur d'une 2-Sphère et son emplacement sur une surface de Boy

À ce stade, le Big Bang et le Big Crunch *"coïncident"*.

Un *"tube"* pourrait alors être envisagé à la place de cette singularité polaire pour relier ces deux singularités de maillage :

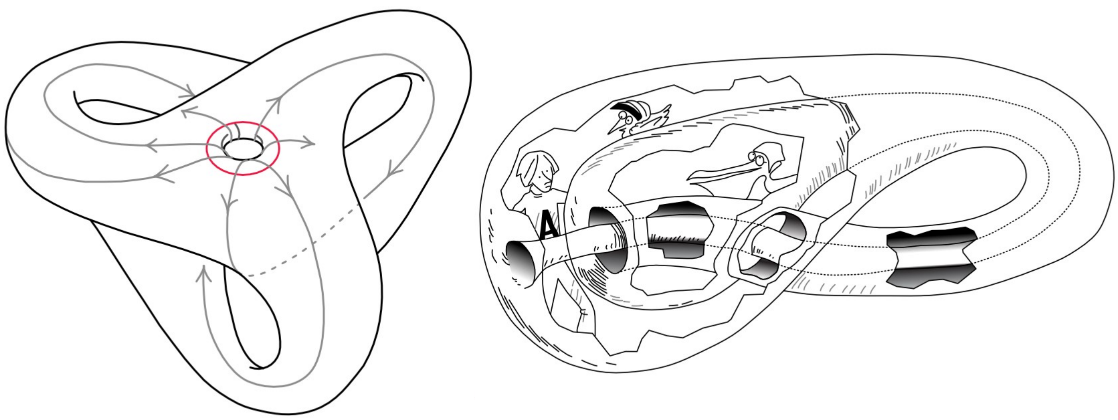


FIGURE 7.5 – Surface de Boy après foliation de la sphère S^2 et la bouteille de Klein K^2 à droite

2. La surface de Boy est un exemple de surface non orientable en 3D avec une seule face et un seul bord. Elle est intrigante car, contrairement à la sphère classique, elle a un point singulier où tous les points antipodaux convergent. Cela signifie que si vous commencez à tracer une ligne sur la surface de Boy, vous reviendrez éventuellement à votre point de départ sans jamais avoir franchi un bord ou utilisé l'autre côté, car il n'y en a pas.

La nature singulière disparaît, et l'objet devient alors le revêtement d'une bouteille de Klein K^2, une surface non orientable sans limites ni intérieur distincts, dont la caractéristique d'Euler-Poincaré est zéro, comme illustré dans la Figure 7.5. La bouteille de Klein est une autre surface non orientable qui n'a ni limite ni intérieur distincts. Imaginez une bande de Möbius dont les bords sont également joints. Contrairement à la surface de Boy, la bouteille de Klein ne peut pas être représentée dans notre espace tridimensionnel sans auto-intersection. Son intérêt réside dans son comportement topologique, où les concepts d'*"intérieur"* et d'*"extérieur"* ne sont pas séparés, offrant ainsi une représentation utile pour certaines idées en topologie et en cosmologie théorique.

Je crois que les limitations en physique théorique et en cosmologie pendant les années 1950 peuvent être attribuées au retard du domaine à épouser la topologie. La topologie, l'étude des propriétés préservées à travers les déformations continues, aurait pu offrir de nouvelles façons de comprendre le tissu de l'univers et ses structures complexes.

Chapitre 8

Interprétation Alternative des Objets Subcritiques Supermassifs M87* et Sagittarius A*

Les premières images d'objets supermassifs situés au centre des galaxies, publiées dans *Astrophysical Journal*, ont été principalement interprétées comme des trous noirs géants. Cette interprétation repose sur l'absence d'explications alternatives largement acceptées. Cette étude réexamine ces images, en particulier celles des objets au centre de la galaxie M87 et de la Voie Lactée. Elle met en lumière la possibilité d'entités supermassives subcritiques, dont le rayon est seulement 5,72% plus court que le rayon de Schwarzschild calculé à partir de leur masse. Nous verrons également que les parties centrales de ces entités sont assombries par l'effet de décalage vers le rouge gravitationnel (Redshift gravitationnel), représenté par $z + 1$. Ce décalage est calculé comme le rapport de la longueur d'onde de la lumière reçue par un observateur éloigné à celle émise depuis la surface, correspondant au rapport des températures observées maximales et minimales du centre à la couronne de ces objets, une valeur remarquablement proche de 3. Nous explorerons l'idée que leur stabilité pourrait résulter d'un équilibre entre l'effondrement gravitationnel, dû à une criticité physique se manifestant bien avant la criticité géométrique, et une pression radiative extrêmement élevée à densité constante émanant de leurs centres, proportionnelle au carré de la vitesse de la lumière - un phénomène initialement considéré par Karl Schwarzschild dans son second article publié en février 1916. Notre analyse vise à enrichir la compréhension des objets supermassifs au centre des galaxies en proposant une interprétation alternative.

8.1 Introduction

Les images des deux objets supermassifs situés au centre des galaxies M87 et de la Voie Lactée ont suscité un grand intérêt médiatique, étant immédiatement qualifiées de "*premières images de trous noirs géants*". Ces images ont été publiées dans le prestigieux *Astrophysical Journal* (M87* [2] et Sagittarius A* au centre de la Voie Lactée [3]). Ci-dessous, une barre relie la nuance de couleur à ce qui est appelé la "*température de luminosité*" :

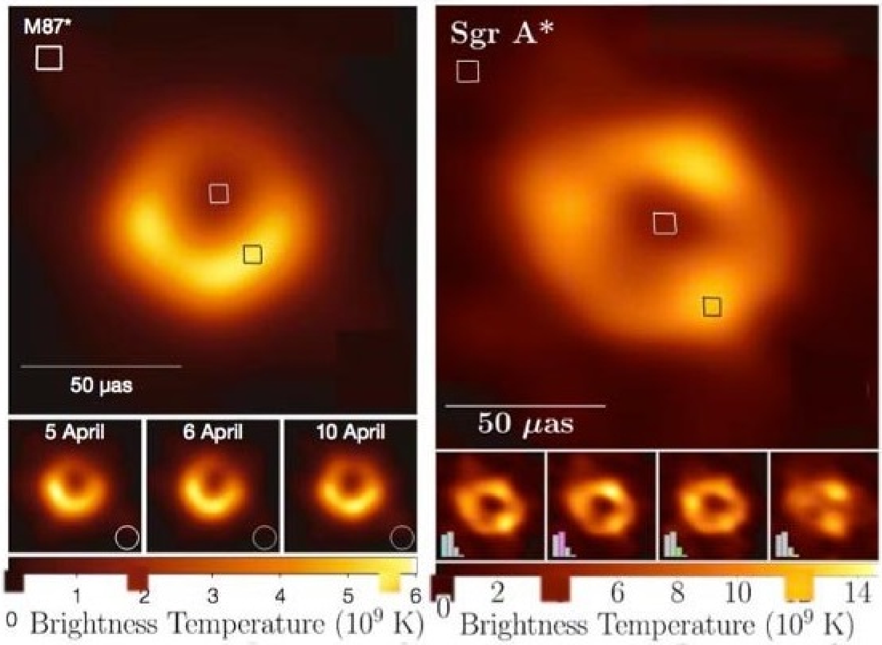


FIGURE 8.1 – Images des objets M87* et Sagittarius A*

Sur la Figure 8.1, à gauche, la première image de l'objet au centre de la galaxie M87 a été publiée en 2019, montrant des températures de luminosité minimales de 1,8 milliard de degrés et maximales de 5,7 milliards de degrés, avec un rapport proche de 3. Trois ans plus tard, en 2022, une seconde image à droite a été publiée, montrant des températures minimales de 4 milliards de degrés et maximales de 12 milliards de degrés, avec un rapport également proche de 3. Ces deux objets ont des masses très différentes, le premier étant 1625 fois plus massif que le second. Il semble curieux que, dans ces circonstances, pour les deux objets, un nuage de gaz chaud au premier plan présente des caractéristiques telles que le rapport des températures maximales et minimales soit si proche de 3 dans les deux cas.

Deux nouvelles images de l'objet au centre de la galaxie M87 ont été publiées dans la revue *Astronomy & Astrophysics* le 18 janvier 2024 ([4]), et nous pouvons constater sur la figure 8.2 une différence dans le rapport des températures de brillance maximales et minimales. Sur la nouvelle image du 11 avril 2017, le rapport entre la température de brillance maximale et minimale donne une valeur approximative de 3,4 ($5,8 \times 10^9\,\mathrm{K}$ divisé par $1,7 \times 10^9\,\mathrm{K}$). En revanche, l'image de droite, prise pratiquement un an plus tard, montre un rapport de température approximatif de 4,8 ($8 \times 10^9\,\mathrm{K}$ divisé par $1,7 \times 10^9\,\mathrm{K}$).

Malgré le fait que la plus récente observation de M87* donne un rapport de température très différent de celui calculé pour le même objet observé un an plus tôt, déterminer laquelle des deux observations est la plus fiable nécessite une analyse approfondie. Cet écart peut être attribué à plusieurs paramètres, allant de la collecte des données interférométriques à leur traitement ultérieur. En effet, ces mesures dépendent de la combinaison de signaux provenant de plusieurs radiotélescopes ré-

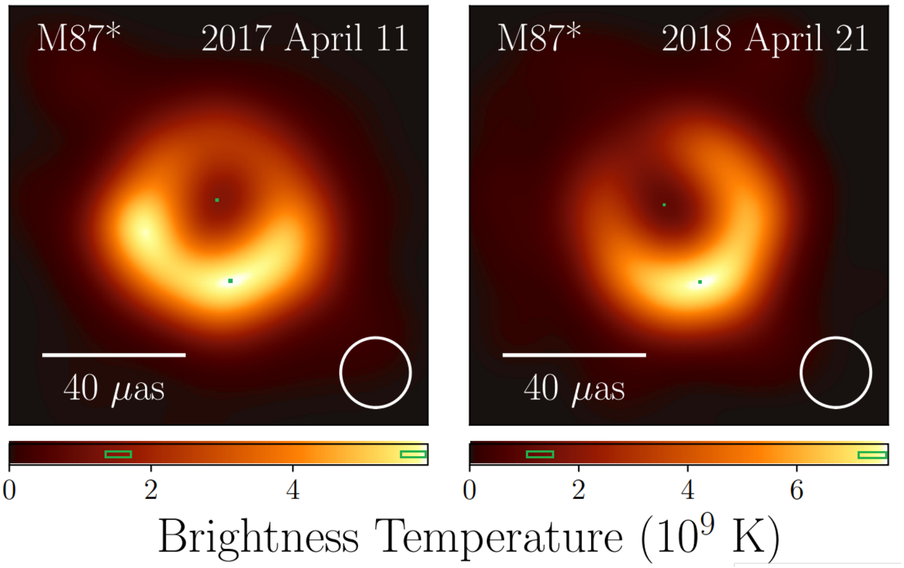


FIGURE 8.2 – Nouvelles images de M87* publiées le 18 janvier 2024.

partis sur de grandes distances. Les erreurs de mesure, les variations atmosphériques, les différences dans l'étalonnage des instruments et les techniques de reconstruction d'image peuvent toutes contribuer aux différences observées. Néanmoins, le seul point commun entre toutes ces observations est que la partie centrale de cet objet céleste présente une température toujours supérieure à 1 milliard de degrés Kelvin.

Si l'image d'un troisième objet au centre d'une nouvelle galaxie conduisait à un rapport de température proche de 3, il serait prudent de remettre en question la véritable nature de ces objets.

Ces premières images d'objets supermassifs situés au centre des galaxies ont néanmoins été associées à des trous noirs géants, et la partie centrale non parfaitement noire semble être due à la lumière émanant d'un disque de gaz chaud en orbite autour du trou noir. Cependant, comme nous le verrons plus tard dans cette étude, une étoile à neutrons peut atteindre la criticité selon deux scénarios :

— De manière abrupte, impliquant l'effondrement soudain d'une étoile supermassive sur son noyau de fer avant de se transformer en supernova.
— Plus progressivement, dans les systèmes binaires, une étoile à neutrons subcritique accumule lentement de la masse en absorbant le gaz émis par une étoile compagne à travers un "*vent stellaire*". La masse critique pour laquelle elle pourrait potentiellement subir une transformation supplémentaire dépend de l'équation d'état de la matière à l'intérieur de l'étoile à neutrons et peut varier. Typiquement, les modèles actuels estiment que la masse critique nécessaire pour une transformation supplémentaire se situe approximativement dans la fourchette de 2 à 3 fois la masse solaire, proche de la limite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

La particularité d'un tel modèle est que l'objet massif doit présenter un rapport de température de luminosité de 3 entre sa couronne et son centre (températures maximales et minimales). Comme nous le démontrerons plus tard, une interprétation alternative plus cohérente serait d'attribuer l'assombrissement de la partie centrale de ces objets à un effet de Redshift gravitationnel (Décalage vers le rouge gravitationnel), qui dilate ou ralentit le temps près de leur horizon.

En effet, un objet massif courbe l'espace-temps autour de lui, affectant la trajectoire non seulement des objets massifs mais aussi de la lumière. Lorsqu'un photon passe près d'un tel objet, son chemin est courbé en raison de cette courbure de l'espace-temps, un phénomène connu sous le nom de lentille gravitationnelle (Voir la figure 3.3). Cependant, ce n'est pas seulement le chemin du photon qui change : en s'éloignant de l'objet massif, le photon perd de l'énergie pour échapper au champ gravitationnel fort. Cette perte d'énergie se traduit par une diminution de sa fréquence, qui étend sa longueur d'onde vers l'extrémité rouge du spectre lumineux, un phénomène connu sous le nom de décalage vers le rouge (Redshift gravitationnel).

Pour calculer l'énergie perdue par un photon en raison du décalage vers le rouge gravitationnel, il est essentiel de comprendre que l'énergie d'un photon est directement liée à sa fréquence f à travers l'équation $E = hf$, où h est la constante de Planck.

Si nous considérons un photon émis avec une fréquence f_{e} et observé avec une fréquence réduite f_{r} en raison du décalage vers le rouge gravitationnel, l'énergie perdue par le photon peut être exprimée comme la différence entre les énergies initiale et finale :

$$\Delta E = h(f_{\mathrm{e}} - f_{\mathrm{r}}) \tag{8.1.1}$$

En utilisant la relation entre fréquence et longueur d'onde ($f = \frac{c}{\lambda}$), où c est la vitesse de la lumière, cette équation peut être réécrite en termes de longueurs d'onde :

$$\Delta E = hc\left(\frac{1}{\lambda_{\mathrm{r}}} - \frac{1}{\lambda_{\mathrm{e}}}\right) \tag{8.1.2}$$

Et en utilisant la définition du Redshift gravitationnel (Décalage vers le rouge) $z = \frac{\lambda_{\mathrm{r}} - \lambda_{\mathrm{e}}}{\lambda_{\mathrm{e}}}$, nous pouvons réarranger pour obtenir une expression en termes de z :

$$\Delta E = hc\left(\frac{1}{\lambda_{\mathrm{e}}(1+z)} - \frac{1}{\lambda_{\mathrm{e}}}\right) \tag{8.1.3}$$

$$\Delta E = -\frac{hc}{\lambda_{\mathrm{e}}}\left(\frac{z}{1+z}\right) \tag{8.1.4}$$

Cette équation montre que l'énergie perdue par un photon en raison du décalage vers le rouge gravitationnel dépend de la longueur d'onde à laquelle il a été émis et de la valeur du Redshift gravitationnel z, le signe négatif indiquant une perte d'énergie.

Cette perte d'énergie n'est pas simplement apparente. Par exemple, le fond diffus cosmologique est le rayonnement qui a subi le plus grand Redshift gravitationnel, avec un facteur z d'environ 1 100, correspondant à une température et une énergie très basses d'environ 3 Kelvin (-270°C), bien inférieures à l'énergie originale (Voir la figure 3.9).

Il est également important de noter que les jets très fins et collimatés observés à proximité d'objets supermassifs indiquent la présence d'un champ magnétique puissant qui s'oppose à l'effondrement de l'objet sous l'effet de la gravité, en exerçant une intense pression magnétique opposée. Ces objets, comme les étoiles à neutrons à leur masse maximale, sont subcritiques, entraînant un effet de décalage vers le rouge gravitationnel limité à 3. Cela suggère que ces objets pourraient être des objets massifs subcritiques.

En science, lorsqu'une observation ne correspond pas à la théorie, c'est généralement la théorie qui est remise en question. Cependant, dans cet article très récent publié dans *Astrophysical Journal* [42], les chercheurs ont modifié les observations pour les aligner avec le modèle du trou noir. Ils ont généré des images synthétiques de trous noirs en manipulant divers paramètres tels que la masse, le moment angulaire, etc., et en sélectionnant celui qui correspondait le mieux aux données observées à l'aide du logiciel PRIMO comme sur la Figure 8.3.

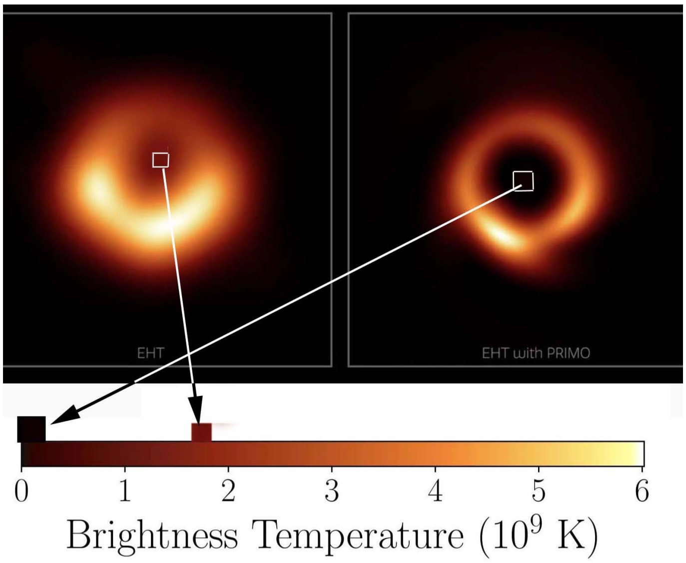


FIGURE 8.3 – Image synthétique du trou noir M87* traitée par PRIMO à droite comparée à l'image originale à gauche

Le résultat fut une confirmation de la théorie, mais il soulève des questions sur la rigueur scientifique et l'objectivité de la recherche.

8.2 Interprétation Alternative du Phénomène

Il existe une interprétation alternative qui consiste à attribuer cette variation de couleur du centre vers le bord à un décalage vers le rouge gravitationnel, avec $z = 2$, conduisant à un allongement de la longueur d'onde par un facteur de $1+z=3$. Que pouvons-nous dire au sujet de ces objets ?

8.2.1 Comparaison des Criticités Physique & Géométrique

Dans la section 6.1, nous avons examiné les solutions de Schwarzschild aux équations d'Einstein, mettant en évidence la métrique extérieure de Schwarzschild et la métrique intérieure correspondante pour un fluide de densité constante ρ_o. Ces solutions ont été confirmées par des phénomènes tels que l'avance du périhélie de Mercure et le phénomène de lentille gravitationnelle (Figure 3.3). Karl Schwarzschild s'est efforcé de s'assurer que les conditions régissant ces deux métriques étaient conformes à la réalité physique.

Dans un scénario où la densité de l'étoile, ρ_o, reste constante, un rayon caractéristique $\hat{r}$ peut être défini. En effet, si nous considérons la métrique intérieure publiée par Schwarzschild dans son deuxième article de février 1916 [74] :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{3}{\kappa\rho_0}\left(\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\mathrm{d}\Theta^2 + \sin^2\chi\sin^2\Theta\mathrm{d}\Phi^2\right) \quad (8.2.1)$$

Schwarzschild considérait la vitesse de la lumière c comme égale à un. Ainsi, l'expression $\frac{3}{\kappa\rho_0}$ devrait être écrite comme $\frac{3c^2}{\kappa\rho_0}$. Ensuite, K. Schwarzschild a défini une constante κ comme étant égale à $8\pi k^2$ *"où k^2 est la constante gravitationnelle de Gauss"*, ce qui lui permet ensuite d'introduire le rayon caractéristique $\hat{r}^2$ égal à $\frac{3}{\kappa\rho_0}$ et, qui est aussi le rayon du cercle faisant partie du méridien de la surface de Flamm ([48]). Ainsi, l'équation 8.2.1 nous amène à :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2}\right)\mathrm{d}t^2 - \hat{r}^2\left(\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\mathrm{d}\Theta^2 + \sin^2\chi\sin^2\Theta\mathrm{d}\Phi^2\right) \quad (8.2.2)$$

Puis, comme K. Schwarzschild utilise l'angle χ pour localiser les points à l'intérieur de la sphère, il passe à la variable r par l'application du changement de variable $r = \hat{r}\sin\chi$, ce qui nous permet d'arriver à la forme moderne de la métrique. Tolman fournit une déclaration précise en 1934 en donnant la métrique suivante ([82]) :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &- \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\left(\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right) \\ &+ \left[\frac{3}{2}\sqrt{1-\left(\frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)}\right]^2 c^2\mathrm{d}t^2\end{aligned} \quad (8.2.3)$$

Où r_n est le rayon de l'étoile et $\hat{r}$ est une constante stellaire en fonction de sa densité ρ_o. Notez qu'il formule l'ordre des termes, dans la métrique, selon la signature $(---+)$ mais conserve les signes des termes respectifs.

Considérons un observateur stationnaire ($\mathrm{d}r = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\phi = 0$) situé à l'intérieur d'une étoile. La métrique devient :

$$\mathrm{d}s = c\mathrm{d}\tau = \left[\frac{3}{2}\sqrt{1-\left(\frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)}\right] c\mathrm{d}t = f(r)\mathrm{d}t \quad (8.2.4)$$

où τ est le temps propre tel qu'observé par l'observateur stationnaire à l'intérieur de l'étoile et $f(r)$ est le facteur temps.

Puis, comme vu dans la section 6.1, lorsque le facteur temps est nul au centre de l'étoile, une criticité physique est atteinte avant l'apparition de la criticité géométrique, lorsque le rayon de l'étoile n'est que 5,72% inférieur au rayon critique $\hat{r}$ déduit de sa densité :

$$r_n = R_{\mathrm{cr}_\phi} = \sqrt{\frac{8}{9}}\hat{r} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G\rho_0}} \tag{8.2.5}$$

8.2.2 Redshift Gravitationnel Proche de la Criticité Physique

Ensuite, la solution de Schwarzschild a été reprise, sous une forme différente, par Tolman ([82]), Oppenheimer ([48]) et d'autres ([1]), menant à l'équation d'état, connue sous le nom d'équation de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV), présentée sous sa forme différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{\rho c^2 + p}{r^2}\left(\frac{4\pi G}{c^4}pr^3 + \frac{Gm(r)}{c^2}\right)\left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-1} \tag{8.2.6}$$

Dont la valeur intégrée a été donnée par Karl Schwarzschild un siècle plus tôt (voir la Figure 8.4), où dans son deuxième article [74] publié en février 1916, il décrit la géométrie à l'intérieur d'une sphère remplie d'un fluide incompressible de densité constante ρ_0 :

$$f_2 = \frac{3}{\varkappa\rho_0}\sin^2\chi, \quad f_4 = \left(\frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2}\right)^2, \quad f_1 f_2^2 f_4 = 1. \tag{29}$$

$$\longrightarrow \quad \rho_0 + p = \rho_0 \frac{2\cos\chi_a}{3\cos\chi_a - \cos\chi} \tag{30}$$

$$3x = r^3 = \left(\frac{\varkappa\rho_0}{3}\right)^{-3/2}\left[\frac{9}{4}\cos\chi_a\left(\chi - \frac{1}{2}\sin 2\chi\right) - \frac{1}{2}\sin^3\chi\right]. \tag{31}$$

FIGURE 8.4 – La loi de pression obtenue en 1916 par Karl Schwarzschild

Dans cette formule, la vitesse de la lumière est toujours ajustée à une valeur unitaire. Par conséquent, cette formule est équivalente à :

$$p = \rho_0 c^2 \left(\frac{\cos\chi - \cos\chi_a}{3\cos\chi_a - \cos\chi}\right) \tag{8.2.7}$$

Ensuite, comme vu dans la Section 8.2.1, K. Schwarzschild est passé à la variable r par le changement de variable simple suivant :

$$r = \widehat{r}\sin\chi \tag{8.2.8}$$

La pression devient nulle à la surface de l'étoile pour $\chi = \chi_a$ avec un rayon donné par :

$$r_a = \widehat{r}\sin\chi_a \tag{8.2.9}$$

Le centre de l'étoile correspond à $\chi = 0$, donc la pression devient :

$$p = \rho_0 c^2 \left(\frac{1 - \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - 1} \right) \tag{8.2.10}$$

Cela impose une limite maximale sur ce rayon pour $\cos \chi_a = \frac{1}{3}$, signifiant :

$$r_a = R_{\text{cr}_\phi} = \widehat{r} \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0,9428 \widehat{r} \tag{8.2.11}$$

Cependant, si nous considérons la masse correspondant à une criticité physique :

$$M_{\text{cr}_\phi} = \frac{4}{3} \pi \hat{r}^3 \rho_o \tag{8.2.12}$$

et celle correspondant à une criticité géométrique :

$$M_{\text{cr}_\gamma} = \frac{4}{3} \pi r_a^3 \rho_o \tag{8.2.13}$$

nous obtenons la relation suivante :

$$M_{\text{cr}_\phi} = \left(\frac{8}{9} \right)^{\frac{3}{2}} M_{\text{cr}_\gamma} = 0,838 M_{\text{cr}_\gamma} = 2,5 M_{\text{solar}} \tag{8.2.14}$$

Une valeur compatible avec les masses de quelques étoiles à neutrons que nous avons pu déduire directement des observations disponibles et pour lesquelles, Thorne, Wheeler et Misner ont estimé dans leur livre (page 611 de [81]) comme la masse critique au-delà de laquelle la pression s'envole à l'infini comme sur la Figure 8.5.

Bien sûr, nous n'aurons jamais d'images d'étoiles à neutrons comparables à celles des objets situés au centre de M87 et de la Voie Lactée. Calculons donc l'effet de décalage vers le rouge gravitationnel $z + 1$ (Redshift gravitationnel) correspondant à des corps célestes massifs proches de cette criticité physique. Cet effet impacte la lumière émise depuis leur surface dans une direction radiale vers un observateur éloigné, qui la percevra avec une longueur d'onde λ_r étirée (*redshiftée*). Il est donné par :

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r_a}}} \tag{8.2.15}$$

Cependant, dans la partie centrale, le rayon de criticité géométrique est défini par le *Rayon de Schwarzschild* qui est :

$$R_s = \frac{2GM_{\text{cr}_\gamma}}{c^2} = \frac{2G}{c^2} \left(\frac{4}{3} \pi r_a^3 \rho_0 \right) = \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} r_a^3 = \frac{r_a^3}{\widehat{r}^2} \tag{8.2.16}$$

Alors, le décalage vers le rouge gravitationnel donnera :

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_a^2}{\widehat{r}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_a c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{8}{9}}} = 3 \tag{8.2.17}$$

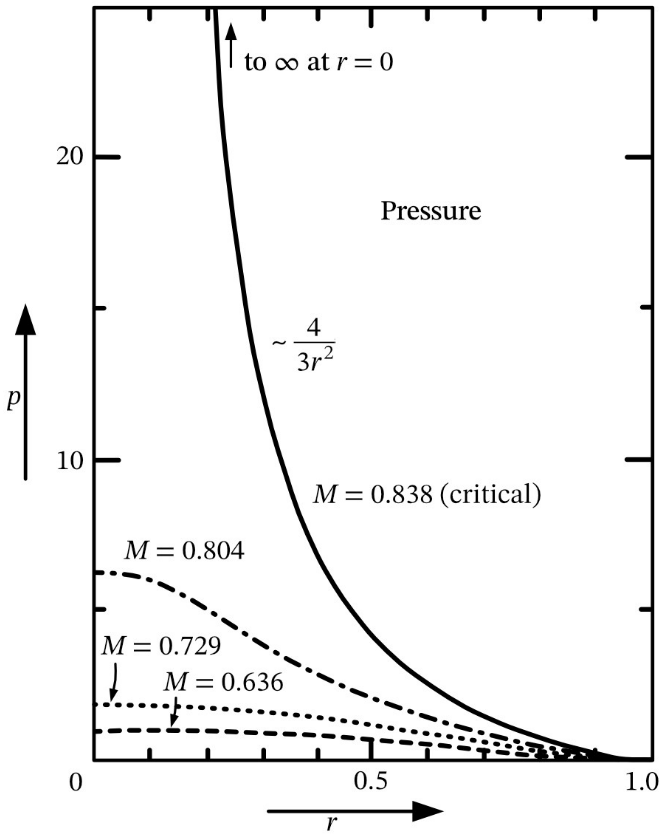


FIGURE 8.5 – Variation de la pression à l'intérieur d'une étoile à neutrons de densité constante

C'est précisément la valeur déduite du rapport entre les températures maximales et minimales des deux premières images de trous noirs situés au centre des galaxies M87 et de la Voie Lactée. Ainsi, les images de ces objets supermassifs pourraient également correspondre à des entités subcritiques, où la pression à leur centre [1] serait infinie, ou du moins extrêmement élevée.

8.2.3 Variation de la Vitesse de la Lumière & de la Pression dans les Plasmas à Densité Constante

Considérons maintenant un fluide (plasma d'hydrogène) à densité constante supposée. À une température inférieure à 3000°C, la pression à l'intérieur est donnée par :

$$p = \frac{\rho_0 v^2}{3} \tag{8.2.18}$$

où v est la vitesse moyenne d'agitation thermique des particules composant le plasma ([16]). Ainsi, le raisonnement qui consiste à dire que *"si la pression p tend vers l'infini, alors cette vitesse devrait également tendre vers l'infini, ce qui est en*

1. définie comme une densité d'énergie par unité de volume

contradiction avec un principe central de la relativité restreinte, le "principe de causalité", selon lequel aucun effet physique ne peut se propager à une vitesse $v > c$" ([81]), conduirait à une aberration physique.

Néanmoins, dans cette région de l'espace-temps, la pression au sein de ce plasma devient radiative :

$$p_r = \frac{\rho_0 c^2}{3} \tag{8.2.19}$$

Si nous envisageons d'augmenter cette pression radiative à densité constante, cela ne peut être réalisé qu'en considérant une variation de la vitesse de la lumière dans le milieu, ce que Karl Schwarzschild a été le premier à envisager [74] :

Die Lichtgeschwindigkeit in unserer Kugel wird:

$$v = \frac{2}{3\cos\chi_a - \cos\chi}, \tag{44}$$

FIGURE 8.6 – Variation de la vitesse de la lumière dans une sphère à densité constante

Ainsi, comme il l'a souligné dans son article, l'augmentation de la vitesse de la lumière suit l'augmentation de la pression. Que se passe-t-il lorsque cette pression monte, tout comme la valeur de la vitesse de la lumière ? C'est simple, il est clair selon Karl Schwarzschild (page 433 de [74]) que ces deux quantités deviennent infinies pour $\cos\chi_a = \frac{1}{3}$, correspondant à $r = R_{\mathrm{cr}_\phi}$ (8.2.11) comme vu dans la Section 8.2.2.

Nous pouvons déduire, selon l'étude de Karl Schwarzschild, que la stabilité de ces objets subcritiques supermassifs est due au fait que l'effondrement gravitationnel, dû à la criticité physique se produisant bien avant la criticité géométrique, est compensé par une pression radiative extrêmement élevée à densité constante provenant de leurs centres, proportionnelle au carré de la vitesse de la lumière.

8.3 Conclusion

Nous avons analysé les images d'objets supermassifs situés au centre des galaxies, qui ont été initialement présentées dans *Astrophysical Journal* comme les premières images de trous noirs géants. À travers notre étude approfondie, nous proposons une interprétation alternative de ces objets qui pourraient correspondre à des entités supermassives subcritiques, exhibant un rapport de température maximal à minimal proche de 3. En effet, leur rayon est seulement 5,72% plus court que les longueurs de Schwarzschild déduites de leur masse. Cette observation s'aligne bien avec l'effet de Redshift gravitationnel, potentiellement caractéristique d'étoiles à neutrons approchant d'une criticité physique, comme suggéré par la solution géométrique intérieure de Schwarzschild publiée dans son deuxième article en février 1916. Cette solution, largement méconnue de la plupart des cosmologistes d'après-guerre et non traduite en anglais avant 1999, offre une perspective unique pour observer ces phénomènes. En examinant des aspects tels que la pression, la vitesse de la lumière et le facteur temps au sein de ces objets, nous visons à enrichir le récit existant sur les phénomènes astrophysiques complexes au cœur des galaxies. Cela inclut une exploration de leur stabilité, qui pourrait être maintenue par un équilibre entre l'effondrement gravitationnel, résultant d'une criticité physique se manifestant bien avant la criticité géométrique, et la pression radiative extrêmement élevée à densité constante provenant de leurs centres, proportionnelle au carré de la vitesse de la lumière. Les travaux centenaires de Karl Schwarzschild nous rappellent qu'il reste encore des mystères à élucider au sein des théories bien établies. Les questions que nous soulevons, en particulier concernant l'évolution du facteur temps et ses implications profondes pour le concept de temps lui-même, sont cruciales et invitent à de nouvelles recherches. Si de futures observations confirment nos hypothèses, en particulier si une image d'un troisième objet supermassif est découverte avec un rapport de température similaire, cela encouragerait une réévaluation de certains de nos modèles astrophysiques actuels. En fin de compte, l'univers, dans son immensité et sa complexité, continue de nous stimuler dans notre quête insatiable de connaissance.

Chapitre 9

Défis & Débats

9.1 Défis Rencontrés dans la Communication & l'Acceptation du Modèle

Dans notre démarche de diffusion et de validation du Modèle Cosmologique Janus, nous avons rencontré des défis redoutables, en particulier dans le domaine de l'édition scientifique. Cette section vise à détailler ces difficultés, en mettant en lumière les complexités et les biais inhérents au système de publication international dominant.

L'un des obstacles les plus significatifs que nous avons rencontrés fut le processus de révision par les pairs dans des revues renommées. Nous avons constaté que le système, tel qu'il existe actuellement, est souvent rigide et imperméable aux idées nouvelles, en particulier celles qui remettent en question les fondements établis de la Physique et de la Cosmologie. Nos tentatives de publication dans des revues prestigieuses telles que *Physical Review D*, *Modern Physics Letters A*, *Astrophysical Journal* et *Astrophysics and Space Science*, entre autres, ont rencontré de la résistance et du scepticisme. Cette résistance semble découler non pas d'un manque de rigueur scientifique de notre part, mais plutôt d'une tendance générale au sein de la communauté scientifique à maintenir le statu quo.

Dans nos tentatives de publication, nous avons reçu des réponses qui illustrent les défis auxquels nous étions confrontés. Par exemple, une lettre du Dr. Ethan T. Vishniac, rédacteur en chef de *The Astrophysical Journal*, soulignait le caractère non conventionnel de notre travail dans le contexte de leur publication :

Dear Dr. Zejli,

I am writing to you with regard to your manuscript cited above, which you recently submitted to The Astrophysical Journal.

I have read your manuscript and considered its appropriateness for publication in our journal. Our journal specializes in manuscripts presenting new results on astronomical observations or theory applied directly to astrophysical systems. Un-

fortunately, the subject matter of your manuscript, which deals with fundamental aspects of bimeric relativity, falls well outside of the subject area of our Journals. Consequently, I regret to inform you that we will be unable to publish your manuscript. Nevertheless, I offer you my best wishes in your future research.

The topic of this paper would be well within the scope of a journal specializing in the phyiscs of gravity. As a general policy, I do not recommend specific journals. I will onlly note that this manuscript is not well organzied as a research paper. The bulk of the paper reviews previous work and the new results and their significance are hard to discern. There is, for example, no mention of either in the abstract.

Regards,
Ethan T. Vishniac
AAS Editor-in-Chief
Johns Hopkins University

Cela signifie que, bien que notre manuscrit traite des aspects fondamentaux de la *"relativité bimérique"* (signifiant bimétrique), il ne s'alignait pas sur l'orientation du journal axée sur de nouveaux résultats astronomiques et théories appliquées aux systèmes astrophysiques. Cette réponse polie et informative reflète une tendance générale à favoriser les travaux qui s'inscrivent dans le cadre établi de la recherche scientifique.

En revanche, les réponses de *Physical Review D* étaient nettement plus succinctes, souvent résumées par la phrase *"Non convenable"*. Cette réponse brève souligne la difficulté d'obtenir l'acceptation d'idées qui s'écartent significativement des paradigmes existants en physique théorique et en cosmologie.

Ces interactions avec des revues de premier plan soulignent un défi significatif dans la communication de nouvelles théories scientifiques : la nécessité d'aligner le travail innovant suivant les attentes et les normes établies des revues scientifiques, tout en préservant l'intégrité et la nouveauté de la recherche.

De plus, les changements récents de politique chez *arXiv*, un dépôt de prépublications de premier plan, ont introduit une couche supplémentaire de complexité. La nouvelle exigence que les soumissions soient initialement précédées d'une publication dans une grande revue à comité de lecture peut paraître paradoxale et contre-intuitive, en particulier pour des recherches pionnières qui pourraient rencontrer une résistance initiale dans des forums traditionnels. Ce changement de politique a considérablement entravé notre capacité à partager rapidement des résultats préliminaires et à interagir plus largement avec la communauté scientifique.

Malgré ces défis, il y a eu des lueurs d'espoir et de reconnaissance. Deux revues, la revue russe *Gravitation and Cosmology* (Pleiades Publishing) et la revue allemande *Astronomische Nachrichten*, ont montré leur volonté de considérer sérieusement notre travail. Leur engagement envers notre recherche, bien que pas aussi étendu que nous l'aurions espéré, est un pas positif vers une acceptation et une compréhension plus larges du JCM.

Dans la section suivante, nous analyserons les réponses et les critiques de ces revues, en mettant en évidence à la fois les commentaires constructifs et les domaines où le processus de révision par les pairs pourrait être amélioré pour accommoder les théories scientifiques innovantes.

9.2 Discussion sur les Critiques & les Réponses Apportées

Au cours de nos efforts pour publier le Modèle Cosmologique Janus, nous avons été confrontés à des défis importants, dont l'un était le long processus d'examen par la revue *Gravitation and Cosmology*. Après huit mois de suivi persistant, la revue a finalement trouvé un évaluateur pour estimer la qualité de notre travail. Cependant, le résultat n'a pas été celui que nous espérions. Voici la correspondance qui encapsule l'essence des défis auxquels nous avons été confrontés.

Réponse de *Gravitation and Cosmology*

Dear Dr. Zejli,

After numerous attempts, we have received a referee report on your paper GC23-019 'Nature of the Dipole Repeller'. Regretfully, the report contains a number of serious critical remarks. In view of this report, we cannot accept your paper for publication in our journal.

Yours sincerely,
Dr. Sergey V. Bolokhov
Editorial Board of Gravitation and Cosmology

REFEREE REPORT

The authors try to explain the pnenomenon of the so-called Dipole Repeller in the framework of the "Janus cosmological model", which is in fact a kind of a bimetric theory. The model itself contains some entities which are very unlikely to exist in nature, such as particles with negative mass and photons with negative energy. To this end, it is appropriate to recall that recent experiments showed that particles of antimatter are subject of the same forces of gravity as matter particles of the same mass. This makes the authors' assumption of negavite masses still more doubtful. Moreover, it looks strange that the theory in question is invoked to explain just one phenomenon and has no impact on other observed systems. A weak point of the paper is that it contains only qualitative arguments without specific calculations taking into account the observed parameters of the repeller.

Ma réponse à cet évaluateur

Dear Dr. Sergey V. Bolokhov,

Thank you for forwarding the referee's report on our manuscript, "Nature of the Dipole Repeller." We appreciate the time and effort invested in reviewing our work. However, we believe there may be some misunderstandings regarding the core concepts of our research, which we would like to clarify.

1. On Negative Mass and Antimatter : The referee's concern about negative masses in light of recent experiments with antimatter highlights a fundamental aspect of our model that may have been overlooked. The Janus cosmological model, which forms the basis of our paper, predicts the existence of two distinct types of antimatter. The Type C antimatter, akin to Dirac's antimatter produced in laboratories, responds to gravitational forces similarly to ordinary matter. In contrast, the Type PT antimatter, corresponding to Feynman's concept of negative mass, is proposed to exist at the centers of cosmic voids, such as the Dipole Repeller. This type exerts an antigravitational effect, which is a critical component of our model and is clearly detailed on page 10 of our manuscript.

2. Observational Confirmations and Model Applications : Our model's validity extends beyond explaining the Dipole Repeller. It offers insights into various astronomical phenomena, which the referee might have missed in our paper :

Galaxy Confinement and Stability : Explained by lacunary spaces filled with negative masses.
Gravitational Lensing Effects : The model accounts for gravitational lensing phenomena around galaxies.
Universal Structure : Our theory proposes a lacunar structure of the universe filled with negative mass clusters, resembling interconnected soap bubbles.
Galaxy Rotation Curves and Gravitational Anomalies : We explain the flattening of rotation curves and the unexpected acceleration of stars at galaxy borders.
Early Galaxy Formation : Supported by recent observations from the James Webb Telescope, our model suggests simultaneous formation of galaxies in the universe's first 100 million years.
High-Redshift Galaxies : We address the dimmed luminosity of distant galaxies (redshift > 7) due to the negative gravitational lensing effect of negative mass clusters.
Local Relativistic Verifications : The model aligns with phenomena like Mercury's perihelion precession and light deviation by the Sun.
Supernova Observations : The asymmetry between positive and negative mass populations correlates with observations of Type Ia supernovae.

3. Misinterpretation of the Model's Scope : Finally, the claim that our theory is only invoked to explain a single phenomenon overlooks its broad applicative range. Our model offers explanations for spiral galaxy structures, cosmic antimatter invisibility due to negative energy photons, and the nature of the universe's invisible components, among others.

We believe this additional information and clarification will help address the concerns raised in the referee report. We are prepared to provide further details or revisions if necessary.

Thank you for considering our response, and we look forward to the opportunity to contribute to the journal.

Yours sincerely

Malheureusement, après notre réponse détaillée abordant chacune des préoccupations de l'évaluateur, nous n'avons reçu aucune communication supplémentaire. L'éditeur et l'évaluateur semblaient s'être retirés du dialogue, illustrant les défis et, parfois, les barrières apparemment insurmontables rencontrées dans la promotion de nouvelles théories scientifiques au sein du cadre établi de l'édition académique.

Analyse Critique des Retours de la Revue *Astronomische Nachrichten*

Nos interactions avec *Astronomische Nachrichten* ont également posé des défis mais ont permis une exploration plus approfondie d'une question fondamentale dans l'acceptation de nouvelles idées en cosmologie. L'unique évaluateur, trouvé après une recherche de deux mois, a initié un dialogue qui a mis en lumière un problème omniprésent : la dépendance aux hypothèses établies par des physiciens renommés, qui façonnent et solidifient ensuite les paradigmes au sein desquels la plupart des cosmologistes opèrent.

L'objectif de notre travail consiste à donner une interprétation géométrique et cosmologique novatrice de la solution extérieure de Schwarzschild, reposant sur deux hypothèses principales :

— **Isotropie :** Invariance sous l'action de *SO(3)* [1].

— **Stationnarité :** Indépendance des termes de la métrique par rapport à la coordonnée temporelle [2].

La solution générale, telle que décrite à l'origine par Schwarzschild, est souvent présentée sans justification adéquate. Tolman a noté en 1934 ([82]) que la forme la plus générale inclut un terme croisé en $\mathrm{d}r\mathrm{d}t$. Cependant, ce terme a été par la suite négligé par commodité. Cette approche, y compris celle de Schwarzschild, a été suivie par de nombreux chercheurs, comme étudié en détail au Chapitre 6.

L'évaluateur a souligné que la non-existence d'un tel terme croisé découlait des hypothèses de symétrie supposées. Nous sommes accusés de négliger une hypothèse de symétrie essentielle : la solution devrait être invariante lorsque t est changé en $-t$ (comme noté dans le livre de Wald [84], entre autres). Par conséquent, une solution avec un terme croisé $\mathrm{d}r\mathrm{d}t$ ne satisferait pas cette condition d'invariance, car changer t en $-t$ altère le signe du terme croisé. Pourtant, quelle est la base physique de cette hypothèse de symétrie concernant la variable temporelle ? Aucune. Elle n'a été ni mentionnée par Schwarzschild ni par beaucoup de ses successeurs.

1. Le groupe des rotations 3D et des translations spatiales.
2. Invariance par translation temporelle.

En effet, le raisonnement (si l'on peut l'appeler ainsi) est basé sur le *"modèle de trou noir"* centré autour de la *"forme moderne"*, où le terme croisé est absent (6.3.1). Il s'agit d'une hypothèse purement mathématique, destinée à s'aligner non pas avec des réalités observationnelles tangibles, mais avec la croyance générale en l'existence des trous noirs. Pour les cosmologistes, par conséquent, cette hypothèse peut sembler *"naturelle"*.

Notre expérience avec *Astronomische Nachrichten* illustre comment les paradigmes bien établis peuvent influencer la réception d'idées innovantes en cosmologie, soulignant le besoin d'ouverture d'esprit et de réévaluation des hypothèses fondamentales à la lumière de nouveaux développements théoriques.

9.3 Tentative d'Explication du Rejet Systématique des Idées Nouvelles

Nous avons récemment rédigé un article détaillé sur la structure symplectique du Modèle Cosmologique Janus dont les fondements ont été expliqués dans le chapitre 5 de ce livre ([65]). Cet article a ensuite été soumis à une revue renommée de physique mathématique. Le retour du principal évaluateur a été notablement positif, qualifiant le contenu de très novateur et méritant une publication, sous réserve de quelques ajustements et d'une clarification approfondie de ses implications physiques.

Prenant en compte ces recommandations, nous avons minutieusement révisé l'article, apportant les éclaircissements nécessaires, avant de le soumettre à nouveau à la même revue. Bien que la publication ne soit pas encore confirmée, les perspectives sont prometteuses compte tenu de l'intérêt initial et de l'analyse approfondie et constructive (enfin !) de l'évaluateur.

Cette expérience soulève des points importants sur l'accueil des nouvelles idées dans le domaine scientifique. Notre article, ayant bénéficié d'un examen attentif et constructif par un expert dans le domaine de la physique mathématique, contraste avec l'approche de certaines revues telles que *Physical Review D*. Ces dernières, souvent, se contentent de répondre par un laconique *"non suitable"*, sans fournir d'analyse détaillée. Un examen des comités éditoriaux de ces revues révèle une prédominance de spécialistes en théorie des cordes, mais un manque notable de mathématiciens-géomètres.

Cette situation illustre le fossé existant entre les mathématiciens et certains physiciens théoriciens. Cette divergence rappelle la définition donnée par Souriau d'une *"physique sans expérience et d'une mathématique sans rigueur"*. Notre expérience avec la soumission de cet article met en lumière les défis inhérents à la présentation d'idées novatrices dans les domaines connexes de la physique et des mathématiques, soulignant ainsi la nécessité d'une plus grande ouverture dans l'évaluation académique.

Chapitre 10

Conclusion & Discussions

En considérant le principe du rasoir d'Occam, qui privilégie la théorie la plus simple et la plus cohérente avec les données observationnelles, il est raisonnable de conclure que le Modèle Janus surpasse le Modèle Standard. Le Modèle Cosmologique Janus fournit une approche cohérente pour expliquer plusieurs phénomènes astrophysiques tout en offrant une interprétation claire des données observationnelles disponibles. Alors que le modèle standard présente des incohérences avec les données observationnelles, nécessitant des constructions ad hoc pour les contourner.

En effet, le modèle Janus va au-delà de la simple proposition d'alternatives aux phénomènes habituellement attribués à la matière noire et à l'énergie noire, tels que l'accélération de l'expansion cosmique, le confinement des galaxies, les effets prononcés de lentille gravitationnelle, et l'homogénéité quasi parfaite du Fond Diffus Cosmologique (CMB), entre autres. Il fournit des clarifications détaillées sur la nature et l'identité des composants invisibles de l'univers. Le modèle résout le paradoxe du manque d'observation de l'antimatière primordiale et offre une explication pour le Répulseur du Dipôle, le considérant comme un conglomérat de masse négative. Cette perspective renforce la crédibilité du Modèle Cosmologique Janus dans l'établissement de la structure à grande échelle de l'univers, tout en expliquant les raisons de la difficulté de détecter la masse négative avec des instruments d'observation optiques. Il rend également compte de la faible magnitude des objets astronomiques à fort redshift gravitationnel (supérieur à 7) et adhère au principe de réfutabilité en stipulant des tests observationnels spécifiques, tels que la présence de conglomérats de masse négative, avec le Répulseur du Dipôle comme exemple notable. En outre, il propose une cartographie alternative de l'univers basée sur une interprétation différente de l'effet de lentille gravitationnelle faible.

De plus, le modèle Janus se confirme par les données observationnelles les plus récentes, en particulier celles obtenues par le Télescope Spatial James Webb, en prédisant la formation des galaxies dans leurs formes actuelles au cours des 100 premiers millions d'années de l'âge de l'univers. En outre, la structure de son groupe dynamique confère une *symétrie CPT* à sa géométrie pour laquelle une prédiction spécifique faite en 2017 a été confirmée en septembre 2023. Cette prédiction concerne l'antimatière C-symétrique (symétrie de charge), synthétisée en laboratoire et émettant des photons d'énergie positive, qui, selon les observations, répond à l'attraction gravitationnelle de la même manière que la matière ordinaire.

Il ouvre également des voies prometteuses de recherche en mécanique quantique, suggérant que l'intégration d'états d'énergie et de masse négatives pourrait être cruciale pour la quantification de la gravitation. Le modèle Janus se conjugue donc parfaitement avec la nature, ne présentant aucune contradiction majeure.

Tout au long de ce livre, nous avons plongé dans les complexités du modèle, démêlant ses nuances et son potentiel pour éclairer les mystères qui ont depuis longtemps déconcerté les cosmologistes et les physiciens.

Ce voyage à travers les domaines des mathématiques avancées, de la physique théorique et de la cosmologie démontre la capacité du modèle à remettre en question les perspectives conventionnelles et à offrir des explications alternatives aux phénomènes que les modèles actuels peinent à élucider pleinement. Les discussions et analyses présentées visent à enrichir la compréhension du lecteur et à susciter une curiosité pour explorer et questionner davantage les limites de nos connaissances scientifiques.

Je crois que les limitations en physique théorique et en cosmologie peuvent être attribuées au retard du domaine à épouser la topologie depuis les années 1950. La topologie, l'étude des propriétés préservées à travers les déformations continues, aurait pu offrir de nouvelles façons de comprendre le tissu de l'univers et ses structures complexes.

En conclusion, j'espère que ce livre servira non seulement de guide complet sur le modèle ancré dans une solide fondation théorique de la relativité générale, mais aussi d'inspiration et de motivation pour une nouvelle génération de penseurs qui oseront courageusement explorer les territoires inexplorés de la cosmologie. Puisse-t-il favoriser une appréciation plus profonde de la beauté complexe de notre univers et de la quête continue de compréhension qui nous anime en tant que scientifiques et êtres humains.

Ce modèle émerge comme une lumière directrice essentielle et indispensable en Cosmologie, illuminant le chemin vers des territoires inexplorés et de nouvelles perspectives. Ce voyage est loin d'être terminé. Il encourage continuellement à approfondir la recherche, mais surtout à faire de nouvelles découvertes, ce qui peut être résumé par la célèbre phrase de Pierre Dac ([20]) souvent attribuée à Charles De Gaulle [1] : *"Des chercheurs qui cherchent, on en trouve. Des chercheurs qui trouvent, on en cherche"*.

1. Citation exacte de Charles De Gaulle prononcée le 13 août 1968 : *" Tout enseignant, tout chercheur bénéficie, après un certain délai, de la sécurité d'un emploi dans l'établissement où il exerce ses fonctions. Autrement dit, il pourra rester chercheur même s'il ne trouve rien et surtout à partir du moment où il ne sera plus d'âge à rien trouver."*

Bibliographie

[1] R. Adler, M. Bazin et M. Schiffer : *Introduction to General Relativity.* McGraw-Hill, 1975.

[2] K. Akiyama *et al.* : First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal*, 2019.

[3] K. Akiyama *et al.* : First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way. *The Astrophysical Journal*, 2022.

[4] K. Akiyama *et al.* : The persistent shadow of the supermassive black hole of M 87. *Astronomy & Astrophysics*, 2024.

[5] E. K. Anderson *et al.* : Observation of the effect of gravity on the motion of antimatter. *Nature*, 2023.

[6] V. Bargmann, P. G. Bergmann et A. Einstein : On The Five-Dimensional Representation Of Gravitation And Electricity. *Theodore von Karman Anniversary Volume*, page 212, 1941.

[7] A. Benoit-Lévy et G. Chardin : Introducing the Dirac-Milne universe. *Astronomy and Astrophysics*, 537:A78, 2012.

[8] P. Bergmann : *An Introduction To The Theory Of Relativity.* Prentice-Hall, 1942.

[9] P. Bergmann et A. Einstein : On A Generalization Of Kaluza's Theory Of Electricity. *Annals of Mathematics*, 39:683, 1938.

[10] H. Bondi : Negative Mass in General Relativity. *Reviews of Modern Physics*, 29(3), 1957.

[11] N. Bourbaki : *Eléments de mathématique : Groupes et algèbres de Lie*. Springer, 2006.

[12] Michael Boylan-Kolchin : Stress testing ΛCDM with high-redshift galaxy candidates. *Nature Astronomy*, April 2023.

[13] C. E. Brennen : *Cavitation and Bubble Dynamics.* Oxford University Press, 1995.

[14] S. Chandrasekhar : *Principles of Stellar Dynamics.* Dover, 1942.

[15] S. Chandrasekhar : *The Mathematical Theory of Black Holes.* Clarendon Press, 1983.

[16] S. Chapman et T. G. Cowling : *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases.* Cambridge University Press, 1970.

[17] Joël CHASKALOVIC : Gravitation theory for mathematical modelling in geo-marketing. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 12(3):417, 2009.

[18] R. CHIBA et R. SCHÖNRICH : Tree-ring structure of Galactic bar resonance. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 505:2412, 2021.

[19] J. W. CRONIN : The Experimental Discovery of CP Violation. *American Physical Society*, 1964.

[20] P. DAC : *Les pensées.* 1972.

[21] T. DAMOUR et Ian I. KOGAN : Effective Lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity. *Phys. Rev. D*, 2002.

[22] N. DEBERGH *et al.* : On evidence for negative energies and masses in the Dirac equation through a unitary time-reversal operator. *Journal of Physics Communications*, 2018.

[23] F. W. DYSON, A. S. EDDINGTON et C. DAVIDSON : A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, pages 291–333, 1920.

[24] A. EDDINGTON : A Comparison with Whitehead's and Einstein's Formulæ. *Nature*, 1924.

[25] A. EINSTEIN et N. ROSEN : The Particle Problem in the General Theory of Relativity. *Phys. Rev.*, 48:73, 1935.

[26] H. EL-AD et T. PIRAN : Voids in the Large-Scale Structure. *The Astrophysical Journal*, 1997.

[27] Leonardo FERREIRA *et al.* : Panic ! at the Disks : First Rest-frame Optical Observations of Galaxy Structure at z>3 with JWST in the SMACS0723 Field. *The Astrophysical Journal Letters*, 2022.

[28] L. FLAMM : Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie. *Physikalische Zeitschrift*, 1916.

[29] L. FLAMM : Republication of : Contributions to Einstein's theory of gravitation. *General Relativity and Gravitation*, 47(72), 2015.

[30] R. W. FULLER et J. A. WHEELER : Causality and multiply connected space-time. *Physical Review*, 1962.

[31] E. GUENDELMAN, A. KAGANOVICH, E. NISSIMOV et S. PACHEVA : Spherically symmetric and rotating wormholes produced by lightlike branes. *International Journal of Modern Physics A*, 25(07):1405–1428, 2010.

[32] E. GUENDELMAN, E. NISSIMOV, S. PACHEVA et M. STOILOV : Einstein-Rosen "bridge" revisited and lightlike thin-shell wormholes. *Bulgarian Journal of Physics*, 44:84–97, 2017.

[33] G. HEALD : The Stronger Case for Gravitational Repulsion between Matter and Antimatter. *Research Gate publication*, (339339776), 2020.

[34] Y. HOFFMAN *et al.* : The quasi-linear nearby Universe. *Nature Astronomy*, 2018. arXiv :1807.03724.

[35] Y. Hoffman, D. Pomarède, R.B. Tully et H. Courtois : The dipole repeller. *Nature Astronomy*, 1:0036, 2017.

[36] S. Hossenfelder : Bimetric theory with exchange symmetry. *Phys. Rev. D*, 78:044015, Aug 2008.

[37] T. Kaluza : On the Unification Problem in Physics. *International Journal of Modern Physics D*, 27(14):1870001, 2018.

[38] Roy P. Kerr : Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. *Physical Letters*, 11:237, 1963.

[39] O. Klein : Quantum theory and five-dimensional relativity theory. *In The Oskar Klein Memorial Lectures*, pages 69–82. 2014.

[40] P. Koiran : Infall time in the Eddington–Finkelstein metric, with application to Einstein–Rosen bridges. *Inter. Jr. of Mod. Phys. D*, 15(30), 2021.

[41] M. D. Kruskal : Maximal Extension of Schwarzschild Metric. *Physical Review*, 119(5), 1960.

[42] L. Medeiros *et al.* : Principal-component Interferometric Modeling (PRIMO), an Algorithm for EHT Data. I. Reconstructing Images from Simulated EHT Observations. *The Astrophysical Journal*, 2023.

[43] A. A. Michelson et E. W. Morley : On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether. *American Journal of Science*, 34(203):333–345, 1887.

[44] B. Morin et J.P. Petit : Le Retournement de la Sphère. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences Série A*, 287(13):791–794, 1978.

[45] M. Morris et K.S. Thorne : Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel : A tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys.*, 56:395, 1988.

[46] T.F. Neiser : Fermi Degenerate Antineutrino Star Model of Dark Energy. *Advances in Astronomy*, 2020:Article ID 8654307, 2020.

[47] J. R. Oppenheimer et G. M. Volkoff : On Massive Neutron Cores. *Physical Review*, 55(4):374–381, 1939.

[48] J.R. Oppenheimer et H. Snyder : On Continued Gravitational Contraction. *Phys. Rev.*, 56(5):455–459, 1939.

[49] A. Palatini : Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton. *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 43:203–212, 1919.

[50] A. I. Pavlovskii : Magnetic Cumulation - A Memoir for Andrei Sakharov. *In* M. Cowan et R. B. Spielman, éditeurs : *Megagauss Magnetic Field Generation and Pulsed Power Applications*, volume I, pages 9–22. Nova Science Publishers, New York, 1994.

[51] S. Perlmutter *et al.* : Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. *Astrophysical Journal*, 517(2):565–586, 1999.

[52] J.P. Petit : *Le topologicon.* Edition Belin, 1985.

[53] J.P. Petit : An interpretation of cosmological model with variable light velocity. *Modern Physics Letters A*, 1988.

[54] J.P. Petit : The Missing-Mass Problem. *Il Nuovo Cimento*, 1994.

[55] J.P. Petit : Twin Universe Cosmology. *Astrophysics and Space Science*, 226: 273–307, 1995.

[56] J.P. Petit : The Janus Cosmological Model and the fluctuations of the CMB. *Progress in Physics*, 2018.

[57] J.P. Petit et G. D'Agostini : Cosmological Bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe. *Modern Physics Letters A*, 29(34), 2014a.

[58] J.P. Petit et G. D'Agostini : Negative Mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy. *Astrophysics And Space Science*, 354:611–615, 2014b.

[59] J.P. Petit et G. D'Agostini : Bimetric models. When negative mass replaces both dark matter and dark energy. Excellent agreement with observational data. Solving the problem of the primeval antimatter. *Database of the French National Center*, 2021a.

[60] J.P. Petit et G. D'Agostini : Constraints on Janus Cosmological model from recent observations of supernovae type Ia. *Astrophysics and Space Science*, 2021b. hal-03426721f.

[61] J.P. Petit, G. D'Agostini et N. Debergh : Evidence of negative energies and masses in the Dirac equation through a unitary time-reversal operator. *J. Phys. Comm.*, 2(115012), 2018.

[62] J.P. Petit, G. D'Agostini et N. Debergh : Physical and mathematical consistency of the Janus Cosmological Model (JCM). *Progress in Physics*, 15, 2019.

[63] J.P. Petit, P. Midy et F. Landsheat : Twin matter against dark matter. *In Where is the matter ? (International Conference on Astrophysics and Cosmology)*, 2001.

[64] J.P. Petit et G. Monnet : Axisymmetrical elliptical exact solution of the couple Vlasov plus Poisson. *In* L. Weliachew, éditeur : *La dynamique des galaxies spirales*, page 391. Centre National de la Recherche Scientifique, 1974.

[65] D. Pigeon, H. Zejli, J.P. Petit et G. d'Agostini : Exploring symmetries through the action on the Torsors of the eight connected components Janus Symplectic Group. working paper or preprint, juillet 2023.

[66] Tsvi Piran : On Gravitational Repulsion. *arXiv*, 2018.

[67] N. Popławski : Radial motion into an Einstein–Rosen bridge. *Physics Letters B*, 687:110–113, 2010.

[68] A. Riess *et al.* : Type Ia Supernova Discoveries at z $>$ 1 from the Hubble Space Telescope, Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution. *Astrophysical Journal*, 607(2), 2004.

[69] A. D. Sakharov : Violation of CP Invariance, C Asymmetry, and Baryon Asymmetry of the Universe. *Pi'sma ZhÉTF*, 5(1):32–35, 1967.

[70] A. D. Sakharov : Cosmological Models of the Universe with Reversal of Time's Arrow. *Pi'sma ZhÉTF*, 79(3):689–693, 1980.

[71] A. D. SAKHAROV : Multisheet Models of the Universe. *Pi'sma ZhÉTF*, 82(3): 1233–1240, 1982.

[72] A.D. SAKHAROV : ZhETF Pis'ma. *JETP*, 49:594, 1979. 76 : 1172.

[73] B.P. SCHMIDT *et al.* : The high-Z supernova search. Measuring cosmic deceleration and global curvature of the universe using type Ia supernovae. *Astrophysical Journal*, 507(1), 1998.

[74] K. SCHWARZSCHILD : Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1916.

[75] K. SCHWARZSCHILD : Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1916.

[76] J. M. SOURIAU : *Géométrie et relativité*. Hermann, 1964.

[77] J. M. SOURIAU : Prolongements du champ de Schwarzschild. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 93:193–207, 1965.

[78] J. M. SOURIAU : *Structure of Dynamical Systems, a Symplectic View of Physics*. Birkhäuser Verlag, 1997.

[79] A. J. M. SPENCER : *Continuum Mechanics*. Dover Publications, Mineola, 1992.

[80] O. C. STOICA : On singular semi-Riemannian manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 11, 2014.

[81] K.S. THORNE, J.A. WHEELER et C.W. MISNER : *Gravitation*. 1973.

[82] R. TOLMAN : *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Oxford at the Clarendon Press, 1934.

[83] Michael TSAMPARLIS : On the Palatini method of variation. *Journal of Mathematical Physics*, 19(3):555–557, 1978.

[84] R. WALD : *General relativity*. 1984.

[85] S. WEINBERG : *The Quantum Theory of Fields*, volume 1-3. Cambridge University Press, 2000.